МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Лаборатория "Сверхмедленных процессов"

В.М. Миклюков

Почти-решения уравнений в частных производных

Волгоград 2009

Предисловие

Ниже приводится цикл статей, посвященных почти решениям нелинейных уравнений с частными производными. В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями уравнений, но с функциями, "близкими"к истинным решениям. В процессе приближенного вычисления мы также находим лишь функцию, "близкую"к истинному решению.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}$ – измеримая по Лебегу функция такая, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess}\inf_{D'} k(x) \leq \operatorname{ess}\sup_{D'} k(x) < \infty \, .$$

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x, \xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения

$$\mu_1 \, k(x) \, |\xi|^p \leq \langle \xi, A(x, \xi) \rangle \, , \qquad |A(x, \xi)| \leq \mu_2 \, k(x) \, |\xi|^{p-1} \, ,$$

где μ_1, $\mu_2 > 0$ и $p \geq 1$ – некоторые постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0 \, . \tag{$*$}$$

Данное уравнение содержит как частный случай уравнение для p-гармонических функций, где предполагается $p > 1$. Допущение $p = 1$ позволяет включить в рассмотрения уравнение минимальной поверхности, уравнение максимальной поверхности в пространстве Минковского, а также уравнение газовой динамики.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является *почти-решением* уравнения (*), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^{1,q}(D) \, , \quad 0 \leq |\varphi(x)| \leq 1 \, ,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset D$ выполнено:

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle \, dx \right| < \varepsilon \, .$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти-решения h.

Нетрудно видеть, что всякая C^2-функция $h : D \to \mathbb{R}^1$ такая, что $|\mathrm{div} A(x, \nabla h)| \le \varepsilon_1$, является почти-решением (*) с уклонением $\varepsilon_1 \mathcal{H}^n(D)$.

Понятие почти-решения было введено в нашей работе "A-решения с особенностями как почти-решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, стр. 31-50"в связи с изучением решений с особенностями уравнения (*). Показано, что при определенных условиях решение (*), даже имеющее неустранимые особенности, может являться почти-решением. Даны оценки его уклонения.

В работе "Почти квазиконформные отображения как почти решения, в сб. Математический и прикладной анализ, вып. 3, изд-во Тюменск. гос. ун-та., 2007, 59-70"устанавливаются связи почти-квазиконформных отображений в смысле Каллендера с почти-решениями уравнений вида (*).

В работе "Принцип максимума для разности почти-решений нелинейных эллиптических уравнений, Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, n. 1, 2007, 33-45"нами доказывается специальная форма принципа максимума для разности почти-решений.

Теорема А. *Пусть h_1, h_2 – почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения (*), удовлетворяющие на границе области предположению*

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\, x_0 \in \partial D}} (h_1(x) - h_2(x)) \le 0 \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Тогда либо $h_1(x) \le h_2(x)$ всюду в D, либо открытое множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и

$$\int\limits_{\{|x|<r\} \cap \mathcal{O}} k(x)\, |\nabla(h_2 - h_1)|^2 \, d\mathcal{H}^n \le \frac{2M}{\mu_1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad M = \sup_D |h_2(x) - h_1(x)|.$$

В работах "Зоны стагнации решений и почти-решений эллиптических уравнений, Восьмая Казанск. летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, т. 35, Казань: Казанское математическое общество, 2007, 174-181", "О зонах стагнации в сверхмедленных процессах, Докл. Акад. Наук, т. 418, n. 3, 2008, 304-307"и "Оценки размеров зоны стагнации почти решений уравнений параболического типа, Сибирский журнал индустриальной математики, т. XI, n. 3(35), 2008, 96-101"указываются размеры зон стагнации почти-решений уравнений эллиптического и параболического типов.

В работе "К неравенству Гарнака для почти решений эллиптических уравнений, Изв. РАН, Серия математическая, Т. 73, n. 5, 2009"приводится некоторая специальная версия неравенства Гарнака для почти-решений. Именно, доказана следующая

Теорема B. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и U, V – ее подобласти, $V \Subset U \Subset D$. Пусть h – положительное почти-решение в D уравнения (*) с $k \equiv 1$, $p > n-1$ и*

$$A(x, \lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,A(x,\xi) \quad \forall x \in D \text{ и } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^1\,. \qquad (**)$$

Тогда

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in V \backslash \mathcal{O}_C\} \le \exp\{\,\theta_p(V,U,D)\}\,\sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x) : x \in V \backslash \mathcal{O}_C\}\,,$$

где точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всевозможным непустым открытым подмножествам $\mathcal{O}_C \subset D$, $D \setminus \mathcal{O}_C \ne \emptyset$, таким, что $h|_{\partial\mathcal{O}_C} = C$, $C = \mathrm{const}$, и $\theta_p(V,U,D)$ – некоторая постоянная (вид которой указывается).

В работе "Решения параболических уравнений как почти решения эллиптических, печ. в сб. Математический и прикладной анализ. Тюменск. гос. ун-т. 2009"устанавливается связь решений уравнений параболического типа с почти-решениями подходящих уравнений эллиптического типа. Именно, доказана

Теорема C. *Пусть $h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$ – обобщенное решение уравнения*

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = B(t, h, h'_t)\,,$$

где $A(x,\xi)$ удовлетворяет условию (**),

$$B(t,h,h'_t) = b_0(t)\,|h|^{p-2}\,h + b_1(t)\,|h|^{p-2}\,h\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

и

$$b_0(t) > 0,\; b_1(t) : (\tau_0,\tau_1) \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

– локально липшицевы на (τ_0, τ_1) функции.

Тогда $h(x,t)$ является почти-решением некоторого уравнения вида (*), а уклонение $s(\tau_0,\tau_1)$ почти-решения определяется выражением

$$s(\tau_0,\tau_1)=\int\limits_D d\mathcal{H}^n\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\left|b_0\,|h|^{p-2}h+b_1\,|h|^{p-2}h\,h'_t-\frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\right|\,dt\,.$$

Близкие утверждения имеют место и для решений уравнений гиперболического типа.

Некоторые приложения к вопросам устранения особенностей решений уравнения газовой динамики и отображений с ограниченным искажением см. в главе 7 нашей книги "Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения, Волгоград: изд-во ВолГУ. 2007".

Научный руководитель лаборатории
"Сверхмедленные процессы"
д.ф.-м.н. проф. Владимир Михайлович Миклюков
miklyuk@mail.ru
24 февраля 2009

Оглавление

1

A-Решения с особенностями как почти решения

В.М. Миклюков

Матем. сб. т. 197. Вып. 11. 2006. с. 31-50.

Вводятся почти решения квазилинейных уравнений с частными производными эллиптического типа. Рассматриваемый класс уравнений включает в себя, в частности, уравнения для p-гармонических функций, уравнение газовой динамики и др. Указаны условия, при которых решения с особенностями являются почти решениями. Даются приложения к проблеме устранимых особенностей решений эллиптический уравнений и квазирегулярных отображений. Доказательства базируются на взаимосвязях с дифференциальными формами.

1.1 Почти решения

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область и пусть $w(x) : D \to \mathbf{R}$ – измеримая по Лебегу функция такая, что

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{D'} w(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{D'} w(x) < \infty \text{ для всякой подобласти } D' \subset\subset D. \tag{1.1.1}$$

Пусть $A : D \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbf{R}^n \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbf{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\mu_1\, w(x)\, |\xi|^p \le \langle \xi, A(x,\xi)\rangle\,, \tag{1.1.2}$$

$$|A(x,\xi)| \le \mu_2\, w(x)\, |\xi|^{p-1}\,, \tag{1.1.3}$$

где μ_1, $\mu_2 > 0$ и $p \ge 1$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\mu = \mu_2/\mu_1$. Ясно, что всегда $\mu \ge 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0\,. \tag{1.1.4}$$

Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ является в D *обобщенным решением уравнения* (1.1.4), если для всякой непрерывной функции $\varphi(x) \in W^1_q(D)$, $1/(p-1)+1/q = 1$ (при $p = 1$ величина $q = \infty$), с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ выполнено:

$$\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle\, dx = 0\,, \tag{1.1.5}$$

где $dx = dx_1 \ldots dx_n$ – элемент объема.

Предположения (i) и (ii) гарантируют измеримость отображения $x \in D \to A(x, g(x))$ для произвольного измеримого на D векторного поля g. Предположения (1.1.2), (1.1.3) говорят об эллиптичности (1.1.4) (детали см. в [13], раздел **3**). Обобщенные решения всевозможных уравнений описанного вида будем называть A-решениями. Множество A-решений содержит, в частности, класс p-гармонических функций и при $p = 2$ — гармонических. Отметим, что при определении A-решений в [13] предполагается, что $p > 1$, и класс A-уравнений не содержит, к примеру, уравнения газовой динамики (см. ниже раздел 1.7).

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ является *почти решением* уравнения (1.1.4), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^1_q(D)\,, \quad 0 \le \varphi(x) \le 1\,,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ выполнено:

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle \, dx \right| < \varepsilon \,. \tag{1.1.6}$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти решения h.

В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями, но с почти решениями. Ниже устанавливается, что при определенных условиях всякое A-решение с особенностями является почти решением. Даются оценки его уклонения.

1.2 Примеры применения

Один из ключевых вопросов, возникающих при анализе перспективности приложений теории "почти решений"в практических разработках — это вопрос об объеме информации, содержащихся в неравенствах вида (1.1.6) по сравнению с соотношениями (1.1.5). Мы проиллюстрируем содержательность неравенств (1.1.6) на примере стандартного принципа максимума – минимума.

Итак, пусть D — область в $\mathbf{R}^n$, пусть $h \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D) \cap C^0(\overline{D})$ – почти решение уравнения (1.1.4), удовлетворяющего предположениям (1.1.2) — (1.1.3) в D. Пусть $\varepsilon > 0$ — его уклонение.

Пусть $h|_{\partial D} < 0$. Предположим, что множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) > 0\}$$

не пусто. В силу условия $h|_{\partial D} < 0$, имеем

$$\overline{\mathcal{O}} \cap \partial D = \emptyset \,.$$

Положим

$$M = \sup_{x \in \overline{D}} h(x) \,.$$

Зафиксируем произвольно функцию $\psi \in W^1_p(D)$ со свойствами:

$$0 \le \psi(x) \le 1 \,, \quad \operatorname{supp}\psi \ - \ \text{компакт} \,. \tag{1.2.7}$$

Функция

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{M} & \text{при} \quad x \in \overline{\mathcal{O}}\,, \\ 0 & \text{при} \quad x \in D \setminus \overline{\mathcal{O}} \end{cases}$$

имеет носителем $\overline{\mathcal{O}}$, принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ и удовлетворяет условию

$$0 \le \widetilde{h}(x) \le 1\,.$$

Указанными свойствами обладает функция $\varphi = \psi^p \widetilde{h}$ причем ее носитель компактен и содержится в D. Тем самым, на основании (1.1.6), мы можем записать

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle dx \right| < \varepsilon\,.$$

Так как

$$\nabla\varphi = p\psi^{p-1}\widetilde{h}\nabla\psi + \frac{\psi^p}{M}\nabla h \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{O}\,,$$

и

$$\nabla\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x \in D \setminus \overline{\mathcal{O}}\,,$$

отсюда находим

$$\frac{1}{M}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p \left\langle \nabla h, A(x, \nabla h)\right\rangle dx \le p\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^{p-1}\,|\widetilde{h}|\,\left|\langle \nabla\psi, A(x, \nabla h)\rangle\right|\,dx + \varepsilon\,.$$

Пользуясь предположениями (1.1.2), (1.1.3), получаем

$$\frac{\mu_1}{M}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, w(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx \le p\mu_2\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^{p-1}\, w(x)|\nabla\psi(x)|\,|\nabla h(x)|^{p-1}\,dx + \varepsilon\,.$$

Пусть $p > 1$. В силу неравенства

$$ab \le \frac{1}{p}\left(\frac{a}{\delta}\right)^p + \frac{p-1}{p}(\delta b)^{p/(p-1)}, \quad a, b > 0\,,$$

где $\delta > 0$ – произвольная постоянная, данное соотношение переписываем в виде

$$\frac{\mu_1}{M}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, w(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx \ \le \delta^{p/(p-1)}(p-1)\mu_2\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, w(x)|\nabla h(x)|^p\,dx +$$

$$+\delta^{-p}\mu_2\int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\,|\nabla\psi(x)|^p\,dx+\varepsilon$$

или,

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, w(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx \ \le \delta^{p/(p-1)}(p-1)\mu\, M\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, w(x)|\nabla h(x)|^p\,dx +$$

$$+\delta^{-p}\mu\, M\int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\,|\nabla\psi(x)|^p\,dx+\frac{M}{\mu_1}\varepsilon$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $(p-1)M\,\mu\,\delta^{p/(p-1)} = 1/2$. Тогда выполнено

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p w(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx \le \frac{M}{\mu_1}\,\varepsilon + \tag{1.2.8}$$

$$+2^{p-1}\mu^p M^p (p-1)^{p-1}\int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\,|\nabla\psi(x)|^p\,dx\,.$$

Пусть $0 < r < R < \infty$. В частности, выбирая в (1.2.8) функцию $\psi\equiv 1$ на $\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}$ и $\psi\equiv 0$ при $\{|x|>R\}\cap\mathcal{O}$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} w(x)|\nabla h|^p\,dx \le 2\varepsilon\frac{M}{\mu_1}+$$

$$\le +2^{p-1}\mu^p M^p(p-1)^{p-1}\int\limits_{\mathcal{O}\cap\{r<|x|<R\}} w(x)\,|\nabla\psi(x)|^p\,dx\,.$$

Если обозначить через

$$\operatorname{cap}_{p,w}(A,L) = \inf_u \int\limits_D w(x)\,|\nabla u|^p\,dx, \quad u|_A \equiv 0, \quad u|_L \equiv 1\,,$$

взвешенную p-емкость конденсатора $(A, L; D)$ и через

$$\lambda_{p,w}(O) = \inf_u \frac{\int\limits_O w(x)\,|\nabla u|^p dx}{\int\limits_O w(x)\,u^p dx}\,, \quad u \in C^1(O) \cap C^0(\overline{O}), \quad u|_{\partial O} = 0,$$

основную частоту порядка $p \geq 1$ открытого множества $O \subset \mathbf{R}^n$, то в описанных предположениях имеем

$$\lambda_{p,w}(\mathcal{O}) \int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\,h^p(x)\,dx \leq \int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx\,,$$

и, в силу (1.2.8), мы получаем

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} w(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx \ \leq \frac{M}{\mu_1}\,\varepsilon +$$

$$+2^{p-1}\mu^p M^p (p-1)^{p-1} \operatorname{cap}_{p,w}(\mathcal{O}_r, \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_R)\,, \tag{1.2.9}$$

где $\mathcal{O}_t = \{|x| < t\} \cap \mathcal{O}$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbf{R}^n$ является (p, w)-*узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{cap}_{p,w}(D_r, D \setminus D_R) = 0\,.$$

Тем самым, приходим к следующей форме принципа максимума для почти решений.

Теорема 1.2.1. *Пусть h – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$ в области $D \subset \mathbf{R}^n$ уравнения (1.1.4) с ограничениями (1.1.2) – (1.1.3), удовлетворяющее на границе области предположению $h|_{\partial D} \leq 0$. Тогда либо*

$h \le 0$ всюду в D, либо для всякой функции $\psi \in W_p^1(D)$ со свойствами (1.2.7) выполнено (1.2.9) и, в частности, если D ограничена или является узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} w(x)\, h^p(x)\, dx \le \frac{2\varepsilon M}{\mu_1\, \lambda_{p,w}(\mathcal{O})}\,. \tag{1.2.10}$$

В случае, когда h есть обобщенное A-решение, т.е. уклонение $\varepsilon = 0$, мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\, h^p(x)\, dx = 0\,.$$

Отсюда, $h(x) \equiv 0$, что противоречит предположению $h_{\partial D} < 0$ и мы приходим к стандартной форме принципа максимума для A-гармонических функций. Другими словами, свойство (1.2.10) для почти решений представляет собой специальную форму обобщеного принципа максимума для A-гармонических функций.

Соотношение (1.2.10) дает оценку размеров открытого множества $\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) > 0\}$ и характеризует насколько почти решение h уравнения A-гармонических в области D функций со свойствами:

$$h|_{\partial D} < 0\,, \quad \max_{x\in D} h(x) = M\,,$$

отличается от 0 на нем.

Величина $\lambda_{p,w}(O)$ невозрастает с расширением множества O и потому

$$\lambda_{p,w}(D) \le \lambda_{p,w}(\mathcal{O})\,.$$

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область и $u : D \to \mathbf{R}$ – некоторая функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число. Подобласть $\Delta \subset D$ называется *s-зоной* (*зоной стагнации)* функции u, если существует постоянная C такая, что эта функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более, чем на s.

К примеру, можно положить

$$\sup_{x\in\Delta} |u(x) - C| \le s$$

(см. [23], [24]), или

$$\|u(x) - C\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int\limits_{\Delta} |u(x) - C|^p\right)^{1/p} \le s\,.$$

Соотношения (1.2.7), (1.2.10) служат также источниками оценок размеров областей стагнации почти решений h. Именно, имеет место

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1 выполнено*

$$\int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\, h^p(x)\, dx \le \frac{2\varepsilon M}{\mu_1\, \lambda_{p,w}(D)}\,. \tag{1.2.11}$$

В частности, если величина $\varepsilon > 0$ столь мала, что

$$\frac{2\varepsilon M}{\mu_1\, \lambda_{p,w}(D)} \le s\,,$$

то

$$\int\limits_{\mathcal{O}} w(x)\, h^p(x)\, dx \le s$$

и множество $\mathcal{O}$ является s-зоной.

1.3 Дифференциальные формы

Обозначим через $Q(x,t)$ куб в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке x и длиной ребра t. Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – *калибровочная* функция, т.е. непрерывная неубывающая функция, обладающая свойством: для всякого $k \ge 1$ найдется постоянная $c(k,\omega)$, такая что при всех $t \ge 0$ выполнено

$$\omega\,(kt) \le c(k,\omega)\,\omega(t)\,. \tag{1.3.12}$$

Символом $C^\omega(D)$ мы обозначаем множество всевозможных функций $\varphi : D \to \mathbf{R}$, для которых для всякого компактного множества $A \subset D$ и произвольного куба $Q(x,r)$ со свойствами

$$Q(x,r) \subset D\,, \quad x \in A\,, \tag{1.3.13}$$

выполнено

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \le c(r,A)\,\omega(|x''-x'|) \quad \text{при всех} \quad x', x'' \in Q(x,r)\,.$$

Здесь $c(r,A) > 0$ – некоторая постоянная.

Напомним некоторые факты теории дифференциальных форм. Ниже мы следуем обозначениям, используемым в [11] и [20]. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ –

координаты в $\mathbf{R}^n$. Каждая дифференциальная форма α степени $\deg\alpha = k$, $1 \le k \le n$, в $D \subset \mathbf{R}^n$ может быть записана в координатах $x_1, \ldots, x_n$ в виде линейной комбинации

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} .$$

Внутреннее (скалярное) произведение форм α и β одной и той же степени есть величина

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \vee \beta = *^{-1}(\alpha \wedge *\beta) = *(\alpha \wedge *\beta). \tag{1.3.14}$$

Скалярное произведение форм обладает обычными свойствами скалярного произведения. Мы полагаем

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} .$$

Форма α степени k называется простой, если найдутся 1-формы α_1, $\ldots$, α_k такие, что

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k.$$

Отметим следующее полезное свойство евклидовой нормы: если $\alpha, \beta \in \bigwedge^*(\mathbf{R}^n)$, то

$$|\alpha \wedge \beta| \le |\alpha|\,|\beta|,$$

в случае, когда хотя бы одна из форм α, β простая. Если формы α и β обе простые и ненулевые, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда ассоциированные с α и β подпространства $\mathbf{R}^n$ ортогональны.

В общем случае, если $\deg\alpha = p$, $\deg\beta = q$, то

$$|\alpha \wedge \beta| \le (C_{p+q}^p)^{1/2} |\alpha||\beta| \tag{1.3.15}$$

(см. [10, §1.7]).

Пусть α, β – дифференциальные формы степени $k \ge 1$ в D с коэффициентами $\alpha_{i_1 \ldots i_k} \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$. Будем говорить, что α и β *интегрально зависимы* в D, если

$$\int_D \alpha \wedge \star\beta = 0. \tag{1.3.16}$$

Дифференциальная форма α называется *слабо замкнутой* в D, если α является интегрально зависимой в D от всякой дифференциальной формы $d\beta$, $\deg\beta = \deg\alpha - 1$, с компактным носителем $\operatorname{supp}\beta =$

$\overline{\{x \in D : \beta \neq 0\}}$ в D и коэффициентами класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Для гладких форм α условие слабой замкнутости вполне согласуется с традиционным условием замкнутости $d\alpha = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Будем говорить, что форма $\alpha \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$, $\deg \alpha = n - 1$, *почти замкнута* в D с уклонением $\varepsilon > 0$, если

$$\left| \int\limits_D d\varphi \wedge \alpha \right| < \varepsilon \tag{1.3.17}$$

для всех

$$\varphi \in C^1(D)\,, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset D\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 1\,.$$

Легко видеть, что если форма α почти замкнута со сколь угодно малым уклонением, то α слабо замкнута.

1.4 Лемма о разбиении единицы

Пусть $k \geq 0$ и $p_1, \ldots, p_n$ – целые. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ семейство всевозможных замкнутых кубов

$$Q = [p_1 2^{-k}, (p_1 + 1)2^{-k}] \times \ldots \times [p_n 2^{-k}, (p_n + 1)2^{-k}]\,.$$

Каждый из кубов Q имеет стороны длины 2^{-k}, параллельные осям координат $\mathbf{R}^n$, и вершины вида $2^{-k}(p_1, \ldots, p_n)$. Такие кубы далее будем называть *бинарными*. Два бинарных куба считаются *разъединенными*, если их пересечение не содержит внутренних точек.

Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$ и h – произвольная калибровочная функция. Для произвольного $\epsilon > 0$ полагаем

$$\mathcal{D}^h_\varepsilon(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} h(s_i)\,,$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям E счетными семействами бинарных кубов $\{Q_i\}$ с ребрами длины $s_i \leq \epsilon$. Положим

$$\mathcal{D}^h(E) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{D}^h_\epsilon(E)\,.$$

Заметим, что семейство $\{Q_i\}$ может быть выбрано состоящим из попарно разъединенных кубов, поскольку непустота внутренности пересечения двух бинарных кубов влечет, что один из них содержит другой. Величину $\mathcal{D}^h(E)$ будем называть *бинарной h-мерой* множества E.

Ясно, что бинарная h-мера $\mathcal{D}^h(E)$ сравнима с мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^h(E)$. Именно, существуют постоянные $C_1 = C_1(n,h)$, $C_2 = C_2(n,h)$, $0 < C_1 \le C_2 < \infty$, такие что для всякого компактного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ выполнено

$$C_1\,\mathcal{H}^h(E) \le \mathcal{D}^h(E) \le C_2\,\mathcal{H}^h(E)\,.$$

В частности, $\mathcal{D}^h(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Для произвольного куба Q со стороной s пусть λQ ($\lambda > 0$) означает куб стороны λs и тем же самым центром.

Следующее утверждение представляет собой специальную модификацию леммы 3.1 из работы Харви и Полкинга [12].

Лемма 1.4.1. *Пусть $\{Q_i\}$ $(1 \le i \le N)$ – конечное семейство попарно разъединенных бинарных кубов с ребрами длины s_i, $s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_N$, и пусть $\lambda > 1$ – некоторое произвольным образом фиксированное число. Для всякого i найдется функция $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \le \varphi_i \le 1$, с носителем $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \lambda Q_i$ такая, что*

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in \cup_{i=1}^{N} Q_i\,. \tag{1.4.18}$$

При этом, для любых $i = 1,\ldots,N$, $k = 1,\ldots,n$ и произвольной постоянной $c(n,\lambda)$, удовлетворяющей условию

$$c(n,\lambda) > 2^{n+2}\frac{\lambda}{\lambda-1}\,, \tag{1.4.19}$$

выполнено

$$|D_k\varphi_i(x)| \le \frac{c(n,\lambda)}{s_i} \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1.4.20}$$

Здесь обозначено $D_k = \partial/\partial x_k$.

Доказательство. Существование разбиения единицы, подчиненного семейству $\{Q_i\}$, с оценкой вида (1.4.20) для $\lambda = 3/2$ следует из [12]. Для наших целей важен конкретный вид постоянной $c(n,\lambda)$ в неравенстве (1.4.20), поэтому мы приводим здесь самостоятельные построения.

Выберем $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ так, чтобы

$$\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \equiv 1 \quad \text{при} \quad |x_i| \le 1$$

для всех $i = 1, \ldots, n$ и

$$\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{при} \quad |x_i| \ge \lambda\,,$$

хотя бы для некоторого i.

Пусть

$$\psi_k(x) = \psi(2(x - a_k)/s_k)\,,$$

где a_k есть центр куба Q_k. Пусть $\varphi_1 = \psi_1$ и пусть

$$\varphi_l = \psi_l\, \Pi_{j=1}^{l-1}(1 - \psi_j) \quad \text{для всякого} \quad l = 2, \ldots, N\,.$$

Тогда $\varphi_k \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и при любом $1 \le k \le N$ выполнено

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subset \operatorname{supp} \psi_k \subset \lambda Q_k\,.$$

По построению функций φ_k ясно, что $0 \le \varphi_k \le 1$ при всех $1 \le k \le N$. Пользуясь индукцией, выводим

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1 - \Pi_{j=1}^{k}(1 - \psi_j) \quad (k = 1, 2, \ldots, N)\,.$$

Поскольку $\psi_j|_{Q_j} = 1$, то $\Pi_{j=1}^{k}(1 - \psi_j) = 0$ при $x \in \cup_{j=1}^{N} Q_j$ и, тем самым,

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in \cup_{j=1}^{N} Q_j\,.$$

Нам осталось найти оценку на производные функций φ_i. Уточним сначала выбор функции ψ. Введем в рассмотрение C^∞-функцию $\xi(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ со свойствами:

$$|\xi(t)| \le 1 \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbf{R}\,, \quad \xi(t) \equiv 1 \quad \text{при} \quad t \in [-1, 1],$$

и

$$\xi(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbf{R} \setminus [-\lambda, \lambda]\,.$$

Выберем

$$\psi(x) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \xi(x_k)\,.$$

Тогда, полагая, что $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ есть центр куба Q_j, имеем

$$\psi_j(x) = \prod_{k=1}^{n} \xi\left(\frac{2(x_k - a_{jk})}{s_j}\right).$$

Отсюда находим, что при любом $p = 1, \dots, n$ выполнено

$$\begin{aligned} |D_p\psi_j(x)| &= \frac{2}{s_j}\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{n} \xi\left(\frac{2(x_k - a_{jk})}{s_j}\right)\right| \left|\xi'\left(\frac{2(x_p - a_{jp})}{s_j}\right)\right| \leq \\ &\leq \frac{2}{s_j}\,\mathrm{esssup}_{t\in\mathbf{R}}|\xi'(t)|\,. \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Функция ξ может быть выбрана так, чтобы для произвольной, наперед заданной постоянной $\mu > 1$ выполнено

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}}|\xi'(t)| \leq \frac{2\mu}{\lambda - 1}\,. \tag{1.4.22}$$

Так как по построению $\varphi_1 = \psi_1$, то, в силу (1.4.21) и (1.4.22), можем записать

$$|D_p\varphi_1(x)| \leq \frac{4\mu}{s_1(\lambda - 1)}\,, \quad p = 1, 2, \dots, n\,. \tag{1.4.23}$$

При $l = 2, 3, \dots$ и $p = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} |D_p\varphi_l| &= \left|D_p\left(\psi_l\,\textstyle\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\right)\right| = \\ &= \left|\psi_l\,D_p\left(\textstyle\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\right) + \textstyle\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)D_p\psi_l\right| = \\ &= \left|\psi_l\textstyle\sum_{q=1}^{l-1}(D_p\psi_q)\prod_{\substack{j=1\\j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - (D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\right|\,. \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Нам потребуется следующее простое геометрическое утверждение.

Лемма 1.4.2. *В условиях леммы 1.4.1 для любого $1 \le q \le N$ никакая точка $x \in \mathbf{R}^n$ не может принадлежать одновременно более чем $\lambda\, 2^n$ попарно разъединенным кубам $\{\lambda Q_i\}_{i=1}^q$ со сторонами $s_i \ge s_q$.*

Для **доказательства** достаточно заметить, что точка x может служить не более чем 2^n вершинами бинарных кубов системы $\{Q_i\}_{i=1}^q$. $\square$

Функции

$$(D_p\psi_q)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) \;\; (q=1,2,\dots,l-1) \quad \text{и} \quad (D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)$$

имеют носители, лежащие в λQ_q и λQ_l, соответственно. Обозначим через $\chi_k(x)$ $(1 \le k \le l)$ характеристическую функцию куба λQ_k. В силу (1.4.24), мы имеем

$$D_p\varphi_l = -\Big(\psi_l \textstyle\sum_{q=1}^{l-1} (D_p\psi_q) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - (D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\Big) =$$

$$= -\Big(\psi_l \textstyle\sum_{q=1}^{l-1} \chi_q(x)\,(D_p\psi_q) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - \chi_l(x)\,(D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\Big)$$

и, далее, пользуясь оценками (1.4.21), (1.4.22), находим

$$|D_p\varphi_l| =$$

$$= \left|\psi_l \sum_{q=1}^{l-1} \chi_q(x)\,(D_p\psi_q) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - \chi_l(x)\,(D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\right| \le$$

$$\le \sum_{q=1}^{l} \chi_q(x)\,|D_p\psi_q| \le \frac{4\mu}{\lambda-1}\sum_{q=1}^{l}\chi_q(x)\frac{1}{s_q}\,.$$

На основании леммы 1.4.2 в каждой фиксированной точке $y \in \mathbf{R}^n$ получаем

$$|D_p\varphi_l(y)| \le \frac{2^{n+2}\lambda\mu}{\lambda-1}\max\left\{\frac{1}{s_1},\dots,\frac{1}{s_l}\right\} \quad (l=2,3,\dots)\,. \tag{1.4.25}$$

Объединяя (1.4.23), (1.4.25) и учитывая, что постоянная $\mu > 1$ произвольна, убеждаемся в справедливости оценки (1.4.20) с постоянной $c(n, \lambda)$, подчиненной ограничению (1.4.19). $\Box$

1.5 Особенности дифференциальных форм

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область и $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Рассмотрим дифференциальную форму θ, $\deg\theta = n-1$, с коэффициентами класса $L^p_{\mathrm{loc}}(D \setminus E)$, $p \geq 1$. Для произвольного куба $Q(a,r) \subset D$ такого, что $Q(a,r) \cup E \neq \emptyset$, полагаем

$$\kappa(Q(a,r),\theta) = \inf \int\limits_{Q(a,r)\setminus E} |\theta - \theta_0|\, dx\,,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным слабо замкнутым формам $\theta_0 \in L^p(Q(a,r) \setminus E)$, $\operatorname{supp}\theta_0 \subset \overline{Q(a,r)} \setminus E$.

Наш результат о почти замкнутых формах состоит в следующем.

Теорема 1.5.1. *Пусть D – подобласть $\mathbf{R}^n$, пусть ω – калибровочная функция, обладающая свойством (1.3.12). Пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество.*

Предположим, что θ, $\deg\theta = n-1$, – дифференциальная форма в $D \setminus E$, почти замкнутая в $D \setminus E$ с уклонением ε_1 и такая, что для всякого куба $Q(x,r) \subset D$ выполнено

$$\kappa(Q(a,r),\theta) \leq \omega(r)\,. \tag{1.5.26}$$

Тогда форма θ почти замкнута в D с уклонением

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + c(n,\lambda)\, c(\lambda,\omega)\, \varepsilon_2\,, \tag{1.5.27}$$

где

$$\varepsilon_2 = \mathcal{D}^h\,(E) \quad \text{и} \quad h(t) = \omega(t)\, t^{-1}\,.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^\infty(D)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset D$. Нам необходимо доказать, что

$$\left|\int\limits_D d\varphi \wedge \theta\right| < \varepsilon_3\,. \tag{1.5.28}$$

Зафиксируем постоянные $\lambda > 1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, функцию ω со свойством (1.3.12) и функцию $\varphi \in C^\infty(D)$, ,$\mathrm{supp}\,\varphi \subset D$, $0 \le \varphi \le 1$.

Пусть $\delta' = \max_D |\nabla\varphi|$. Так как $\mathcal{D}^h\,(E) = \varepsilon_2$ для $h(t) = \omega(t)\,t^{-1}$ и множество $E \cap \mathrm{supp}\,\varphi$ компактно, то по определению бинарной меры $\mathcal{D}^h(E)$ множество $E \subset D$ может быть покрыто конечной системой бинарных кубов

$$\{Q(x_l, r_l)\}\,, \quad r_l \le \delta < \delta'\,, \quad 1 \le l \le m\,,$$

так, что

$$\mathrm{int}\,Q(x_p, r_p) \cap \mathrm{int}\,Q(x_q, r_q) = \emptyset \quad \text{при всех} \quad p \neq q \tag{1.5.29}$$

и

$$\sum_{l=1}^{m} \omega(r_l)\,r_l^{-1} < \varepsilon_2 + \varepsilon'\,, \tag{1.5.30}$$

где $\delta > 0$ и $\varepsilon' > 0$ – произвольные числа.

По лемме 1.4.1 найдется семейство функций $\varphi_l \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ со свойствами (1.4.18) - (1.4.20).

Положим

$$I[\varphi] \equiv \int\limits_{D\setminus E} d\varphi \wedge \theta\,.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} I[\varphi] \;&= \int\limits_D \sum_{l=1}^{m} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta + \\ &+ \int\limits_D d(\varphi\,(1 - \sum_{l=1}^{m} \varphi_l)) \wedge \theta = \\ &= \int\limits_D \sum_{l=1}^{m} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) + \\ &+ \int\limits_D d(\varphi\,(1 - \sum_{l=1}^{m} \varphi_l)) \wedge \theta\,. \end{aligned}$$

Здесь θ_0 есть слабо замкнутая в $Q(x_l, r_l) \setminus E$ форма, описанного выше вида, и мы использовали тот факт, что форма $d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta_0$ финитна в $Q(x_l, r_l) \setminus E$ и потому

$$\int\limits_{Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta_0 * \mathbb{1} = \int\limits_{Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l \wedge \theta_0) * \mathbb{1} = 0\,.$$

Однако,

$$\operatorname{supp} \varphi \left(1 - \sum_{l=1}^{m} \varphi_l\right) \subset D \setminus E\,, \quad 0 \le \varphi \left(1 - \sum_{l=1}^{m} \varphi_l\right) \le 1\,.$$

Форма θ почти замкнута с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$. Таким образом,

$$\left| \int\limits_{D} d(\varphi\,(1 - \sum_{l=1}^{m} \varphi_l)) \wedge \theta \right| < \varepsilon_1\,,$$

и мы получаем

$$|\,I[\varphi]\,| < \sum_{l=1}^{m} \left| \int\limits_{D} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| + \varepsilon_1\,.$$

Отсюда,

$$|\,I[\varphi]\,| < \sum_{l=1}^{m} \left| \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| + \varepsilon_1\,. \tag{1.5.31}$$

Нашей ближней целью теперь является доказательство следующего утверждения.

Лемма 1.5.1. *В предположениях теоремы 1.5.1 для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ и всякого $l = 1, \ldots, m$ имеет место соотношение*

$$\left| \int\limits_{\lambda B(x_l,r_l)} d\,(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| \le c(\omega, \lambda, \varphi)\,\omega(r_l)\,, \tag{1.5.32}$$

где

$$c(\omega,\lambda,\varphi)=c(\lambda,\omega)\,\left(\max_D|\nabla\varphi|+c(n,\lambda)\,\frac{1}{r_l}\right)$$

– постоянная.

Для **доказательства** достаточно воспользоваться соотношением (1.5.26) и заметить, что

$$\left|\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right| \leq \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\,|\;dx\leq$$

$$\leq \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |d(\varphi\,\varphi_l)|\;|\theta-\theta_0|\;dx\leq$$

$$\leq \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} (|\varphi|\,|\nabla\varphi_l|+|\nabla\varphi|\,|\varphi_l|)\;|\theta-\theta_0|\;dx\leq$$

$$\leq\left(\max_{\lambda Q(x_l,r_l)}|\nabla\varphi_l|+\max_D|\nabla\varphi|\right)\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)}|\theta-\theta_0|\;dx\,.$$

□

Не ограничивая общности можем считать форму θ_0 выбранной так, что

$$\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)}|\theta-\theta_0|\;dx\leq\kappa(\lambda Q(x_l,r_l),\theta)\,.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right|\leq$$

$$\leq\left(\max_{\lambda Q(x_l,r_l)}|\nabla\varphi_l|+\max_D|\nabla\varphi|\right)\,\omega(\lambda r_l)\leq$$

$$\leq c(\omega_1,\lambda)\,\omega(r_l)\,\left(\max_{\lambda Q(x_l,r_l)}|\nabla\varphi_l|+\max_D|\nabla\varphi|\right)\leq$$

$$\leq c(\omega_1,\lambda)\,\omega(r_l)\,\left(\max_D|\nabla\varphi|+c(n,\lambda)\,\frac{1}{r_l}\right)=c(\omega,\lambda,\varphi)\omega(r_l)\,.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 1.5.1 просуммируем (1.5.32) по всем $l=1,\ldots,m$. Тогда имеем

$$\textstyle\sum_{l=1}^m\left|\displaystyle\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)}d(\varphi\,\varphi_l)\wedge\theta\right|\;\leq c(\omega,\lambda)\sum_{l=1}^m\omega(r_l)\,r_l^{-1}\,(\delta+c(n,\lambda))\;.$$

Пользуясь (1.5.30), (1.5.31) и, полагая ε', $\delta\to 0$, получаем

$$|\,I[\varphi]\,|\leq\varepsilon_1+c(n,\lambda)\,c(\lambda,\omega)\lim_{\delta\to 0}\sum_{l=1}^m\omega(r_l)\,r_l^{-1}=\varepsilon_1+c(n,\lambda)\,c(\lambda,\omega)\,\mathcal{D}^h\,(E)\,.$$

Данное соотношение влечет (1.5.27). $\Box$

Отметим следующий специальный случай доказанной теоремы.

Следствие 1.5.1. *Пусть D – подобласть $\mathbf{R}^n$, ω – калибровочная функция, обладающая свойством (1.3.12), и пусть $E\subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть θ, $\deg\theta=n-1$, – слабо замкнутая в $D\setminus E$ дифференциальная форма, удовлетворяющая (1.5.26).*

Тогда если $\mathcal{H}^h(E)=0$ для $h(t)=\omega(t)\,t^{-1}$, то форма θ слабо замкнута в D.

Для **доказательства** достаточно заметить, что предположение об обращении в нуль h-меры Хаусдорфа множества E влечет равенство нулю бинарной меры $\mathcal{D}^h(E)$. $\Box$

1.6 Особенности A-решений

Укажем некоторые применения полученных результатов для A-решений с особенностями.

Теорема 1.6.1. *Пусть D – подобласть $\mathbf{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – почти решение с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$ уравнения (1.1.4), удовлетворяющего предположениям (1.1.2), (1.1.3).*

Предположим также, что для всякого куба $Q(x,r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (1.3.12) выполнено

$$\mu_2 \int\limits_{Q(x,r)\setminus E} w(x)\, |\nabla f(x)|^{p-1}\, dx \leq \Omega(r)\,. \tag{1.6.33}$$

Тогда если $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2 < \infty$ для $h(t) = \Omega(t)\, t^{-1}$, то f является почти решением в D уравнения (1.1.4) с уклонением ε_3, определенным как в (1.5.27).

Доказательство. Положим

$$\theta(x) = * \sum_{i=1}^{n} A_i(x, \nabla f)\, dx_i\,.$$

Для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(D \setminus E)$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, имеем

$$d\varphi \wedge \theta = \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla f)\rangle\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\,.$$

Тем самым, условие (1.1.6) влечет

$$\left| \int\limits_{D\setminus E} d\varphi \wedge \theta \right| < \varepsilon_1\,,$$

и форма θ почти замкнута в $D \setminus E$ с уклонением ε_1.

Так как

$$|\theta(x)| = |A(x, \nabla f)|\,,$$

то предположение (1.6.33) гарантирует выполнение (1.5.26) с функцией

$$\omega(t) = \frac{1}{\mu_2}\Omega(t)\,.$$

На основании теоремы 1.5.1 заключаем, что f есть почти решение в области D с уклонением ε_3. □

Следствие 1.6.1. *Пусть D – подобласть $\mathbf{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – обобщенное решение в $D \setminus E$ уравнения (1.1.4), удовлетворяющего предположениям (1.1.2), (1.1.3).*

Предположим также, что для всякого $Q(x,r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (1.3.12) выполнено

$$\mu_2 \int\limits_{Q(x,r)\setminus E} w(x)\,|\nabla f(x)|^{p-1}\,dx \le \Omega(r)\,. \tag{1.6.34}$$

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ для $h(t) = \Omega(t)\,t^{-1}$, то f является обобщенным решением в D уравнения (1.1.4).

Некоторые весьма тонкие результаты, касающиеся проблемы устранимых особенностей p-гармонических функций, анонсированы А.В. Покровским [28]. Относительно других специальных случаев утверждения об устранимых особенностях решений эллиптических уравнений см. [6], [7], [4], [18], [14], [15], [32], [31], [8], [22], [26], [17] и др. Постановка задачи о решениях эллиптических уравнений с особенностями, как почти решениях, кажется, является новой.

1.7 Решения уравнения газовой динамики

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера обобщенные решения уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma(q) f_{x_i}\right) = 0, \quad q = |\nabla f|, \tag{1.7.35}$$

где

$$\sigma(q) = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

При $n = 2$ мы имеем классическое уравнение газовой динамики. Данное уравнение описывает потенциал скоростей плоского установившегося течения идеального газа в адиабатическом режиме; γ, $-\infty < \gamma < +\infty$,

— постоянная, характеризующая газ (см., например, [19, §15 главы IV]). Для $\gamma = 1 \pm 0$ имеем

$$\sigma(q) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,q^2\right\}.$$

В случае $n = 2$ данное уравнение имеет эллиптический тип при $\gamma \le 1$. Для $\gamma > 1$ оно эллиптично при $q < \sqrt{2/(\gamma-1)}$, параболично при $q = \sqrt{2/(\gamma-1)}$ и гиперболично при $q > \sqrt{2/(\gamma-1)}$. В общем случае $n \ge 2$ мы предполагаем, что

$$\left\{\begin{array}{l} \text{или } \gamma \le 1, \quad \text{или } \gamma > 1 \text{ и} \\ \\ \operatorname{ess\,sup}_{D'} q(x) < \sqrt{2/(\gamma-1)} \text{ для всякой подобласти } D' \subset\subset D\,. \end{array}\right. \tag{1.7.36}$$

Если решение f фиксировано, то мы можем рассматривать σ как некоторую (наперед заданную) измеримую функцию переменной x. Решения уравнения (1.7.35), в котором весовая функция σ есть функция переменной x, называются *σ-гармоническими функциями.* Изучению таких функций посвящено значительное количество работ (см., например, [1], [9] и цитированную там литературу).

Теорема 1.7.1. *Пусть D – подобласть $\mathbf{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – почти решение с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$ уравнения (1.7.35), удовлетворяющего предположениям (1.7.36).*

Предположим также, что для всякого $Q(x,r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (1.3.12) выполнено

$$\int\limits_{Q(x,r)\setminus E} \sigma(|\nabla f(x)|)\,|\nabla f(x)|\,dx \le \Omega(r)\,. \tag{1.7.37}$$

Тогда если $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2 < \infty$ для $h(t) = \Omega(t)\,t^{-1}$, то f является почти решением в D уравнения (1.7.35) с уклонением ε_3, определенным как в теореме (1.5.27).

Доказательство. Положим

$$\mu_2\,w(x) = \sigma(|\nabla f(x)|)\,.$$

Предположение (1.7.36) влечет выполнение свойства (1.1.1) для весовой функции w. Для нужного заключения достаточно заметить, что из (1.7.37) следует (1.6.33) и воспользоваться теоремой 1.6.1. $\Box$

Следствие 1.7.1. *Пусть D – подобласть $\mathbf{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – обобщенное решение уравнения (1.7.35) в $D \backslash E$, удовлетворяющего предположениям (1.7.36).*

Предположим, что для всякого куба $Q(x,r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (1.3.12) выполнено

$$\int\limits_{Q(x,r)\backslash E} \sigma(|\nabla f(x)|)\, |\nabla f(x)|\, dx \le \Omega(r)\,. \tag{1.7.38}$$

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ для $h(t) = \Omega(t)\, t^{-1}$, то f является обобщенным решением в D уравнения (1.7.35).

1.8 Приложения к квазирегулярным отображениям

Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество. Непрерывное отображение $F : U \to \mathbf{R}^n$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$ называется *квазирегулярным*[1] [13, Section 14], если почти всюду в U выполнено

$$|F'(x)|^n \le K\, J_F(x)\,. \tag{1.8.39}$$

Здесь $F' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – формальная производная F и

$$|F'(x)| = \max_{|h|=1} |F'(x)h|\,.$$

Символом $J_F(x)$ мы обозначаем якобиан F в точке $x \in U$.

Отметим специальный случай теоремы 1.5.1.

Теорема 1.8.1. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D подмножество. Пусть $F : D \setminus E \to \mathbf{R}^n$ – квазирегулярное отображение, имеющее непрерывное продолжение F^* на E.*

[1] отображением с ограниченным искажением [29, §5 главы II]

Предположим, что для любого куба $Q(x,r) \subset D$ *и некоторой калибровочной функции* ω *со свойством (1.3.12) выполнено*

$$\int\limits_{Q(x,r)\setminus E} |F'|^{n-1}\, dx \le \omega(r)\,. \tag{1.8.40}$$

Если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ *при* $h(t) = \omega(t)\, t^{-1}$, *то* E *устранимо и отображение* F^* *квазирегулярно в* D.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\theta = dF_2 \wedge \ldots \wedge dF_n\,.$$

Мы имеем

$$\langle dF_1, \star\theta \rangle = J_F(x)\,.$$

Согласно теореме 6.4 из [11] неравенство (1.8.39) влечет, что

$$|\theta|^{n/(n-1)} \le c(n,K)\, |F'|^n \le c(n,K)\, |dF_1|^n\,.$$

На основании теоремы 1.5.1 заключаем, что для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C^\infty(D)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset D$, справедливо соотношение

$$\int\limits_D d(\varphi^n\, F_1) \wedge \theta = 0\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_D \varphi^n\, dF_1 \wedge \theta = -\int\limits_D F_1\, d\varphi^n \wedge \theta$$

и

$$\int\limits_D \varphi^n\, J_F(x)\, dx = n \int\limits_D \varphi^{n-1}\, F_1\, d\varphi \wedge \theta\,.$$

Однако, согласно (1.8.39),

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le K \int\limits_D \varphi^n J_F(x)\, dx$$

и потому

$$|F_1\, d\varphi \wedge \theta| \le |\nabla\varphi|\, |F_1|\, |\theta|\,.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le \int\limits_D \varphi^{n-1}\, |\nabla\varphi|\, |F_1|\, |\theta|\, dx\,.$$

Легко видеть, что

$$|\theta| \le c(n)\, |F'|^{n-1}\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le c(n) \int\limits_D \varphi^{n-1}\, |\nabla\varphi|\, |F_1|\, |F'|^{n-1}\, dx\,.$$

На основании неравенства Гельдера можем записать, что

$$\int\limits_D \varphi^{n-1} |\nabla\varphi|\, |F_1|\, |F'|^{n-1}\, dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_D |F_1|^n\, |\nabla\varphi|^n dx\right)^{1/n} \left(\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx\right)^{n/(n-1)}\,.$$

Отсюда выводим

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le c(n) \int\limits_D |F|^n\, |\nabla\varphi|^n dx\,. \tag{1.8.41}$$

Так как $\mathcal{H}^h(E) = 0$, то либо $|F'| = 0$ почти всюду в D, а потому $F \equiv \mathrm{const}$, либо

$$\underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} > 0\,. \tag{1.8.42}$$

Соотношение (1.8.42) влечет $\mathcal{H}^n(E) = 0$. Но $F^* \in C^0(D)$ и потому F_1 принадлежит классу ACL в D. Так как φ произвольна, то из (1.8.41) вытекает $F' \in L^n_{\mathrm{loc}}(D)$. Тем самым, мы заключаем, что $F_1 \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$.

Используя те же самые аргументы для каждой функции $F_2, \ldots, F_n$, легко убедиться, что отображение $F \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и, следовательно, оно квазирегулярно в всей области D. $\square$

Следствие 1.8.1. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область, пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество, и пусть $F : D \setminus E \to \mathbf{R}^n$ – квазирегулярное отображение.*

Если $F \in \mathrm{Lip}(D \setminus E)$ и $\mathcal{H}^n(E) = 0$, то E устранимо для F.

Для **доказательства** достаточно заметить, что предположение $F \in \mathrm{Lip}(D \setminus E)$ влечет

$$\sup_{x \in D \setminus E} |F'| < \infty\,.$$

Утверждение следует из теоремы 1.8.1 при $\omega(t) = t$. $\square$

Другие признаки устранимости особого множества для квазирегулярных отображений см. И.Н. Песин [25], В.М. Миклюков [21], В.В. Асеев, А.В. Сычев [2], [30, с. 108-113], Кауфман и Ву [16], Мартио, Миклюков, Вуоринен [20] и др.

Автор признателен А.Н. Кондрашову, прочитавшему статью в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний.

Список литературы

[1] Alessandrini G. and Nesi V. Univalent σ-harmonic mappings// Arch. Ration. Mech. and Anal. 2001. V. 158. P. 155-171.

[2] Асеев В.В., Сычов А.В. О множествах устранимых для пространственных квазиконформных отображений// Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. n. 6. С. 1213-1227.

[3] Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961.

[4] Carleson L. Removable singularities for continuous harmonic functions in $\mathbf{R}^n$// Math. Scand. 1963. V. 12. P. 15-18.

[5] Долженко Е.П. О "стирании"особенностей аналитических функций// Успехи матем. наук. 1963. Т. 18. n. 4. С. 135-142.

[6] Долженко Е.П. О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. n. 5. С. 1113-1130.

[7] Долженко Е.П. Об особых точках непрерывных гармонических функций// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. n. 6. С. 1251-1270.

[8] David G., Mattila P. Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane// Revista Mat. Iberoamericana. 2000. V. 16, P. 137-215.

[9] Faraco D. Beltrami operators and microstructure. Academic dissertation. Depart. of Math. Faculty of Sci. University of Helsinki. Helsinki. 2002.

[10] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука. 1987.

[11] Franke D., Martio O., Miklyukov V.M., Vuorinen M. and Wisk R. Quasiregular mappings and $\mathcal{WT}$ -classes of differential forms on Riemannian manifolds// Pacific J. Math. 2002. V. 202. n. 1. P. 73-92.

[12] Harvey R., Polking J.C. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations// Acta math. 1970. V. 125. n. 1/2. P. 39-56.

[13] Heinonen J., Kilpeläinen T. and Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Clarendon Press. 1993.

[14] Ищанов Б.Ж. Об устранимых особенностях функций классов BMO и их обобщений// Вестник Московск. университета. Сер. 1. Матем., Мех. 1985. Вып. 5. С. 77-80.

[15] Ищанов Б.Ж. Незамкнутые особые множества для слабых решений линейных дифференциальных уравнений// Геометрические вопросы теории функций и множеств. 1989. Калинин: Калининский гос. университет. С. 41-49.

[16] Kaufman R. and Wu J.-M. On removable sets for quasiconformal mappings// Ark. Mat. 1996. V. 34. P. 141-158.

[17] Kilpeläinen T., Zhong X. Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations// Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. n. 6. P. 1681-1688.

[18] Kral J. Removable singularities of solutions of semielliptic equations// Rendiconti de Matematica. 1973. V. 6. n. 4. P. 763-783.

[19] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука. 1973.

[20] Martio O., Miklyukov V.M. and Vuorinen M. Removable singularities of $\mathcal{WT}$-differential forms and quasiregular mappings// Reports of the Depart. of Math., Univ. of Helsinki. 2004. Preprint 382. 13pp.

[21] Миклюков В.М. Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве// Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. n. 3. С. 525-527.

[22] Миклюков В.М. Множества особенностей решений уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского// Сиб. матем. ж.. 1992. Т. 131. n. 6. С. 131-140.

[23] Миклюков В.М. Зоны стагнации гармонической функции на поверхности и предлиувиллевы теоремы// Геометрический анализ и его приложения. . Тез. докл. междунар. школы-конференции. Май 2004. Волгоград: изд-во ВолГУ. С. 131-132.

[24] MiklyukovV.M., Chow S.-S. and Solovjov V.P. Stagnation zones of ideal flows in long and narrow bands// IJMMS. 2004. V. 62. P. 3339-3356.

[25] Песин И.Н. Множества устранимых особенностей аналитических функций и квазиконформные отображения// Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. 1960. М.: ФМ. С. 419-424.

[26] Покровский А.В. Локальные аппроксимации решениями гипоэллиптических уравнений и устранимые особенности// Докл. РАН. 1999. Т. 367. n. 1. С. 15-17.

[27] Покровский А.В. Об устранимых особенностях решений однородных эллиптических уравнений в классах Никольского-Бесова// Докл. РАН. 2001. Т. 380. n. 2. С. 168-171.

[28] Pokrovskii A.V. Removable Singularities for p-Harmonic Functions// Междунар. школа-конф. по геометрии и анализу. Тез. докл. 2004. Новосибирск: изд-во Института математики СО РАН. С. 201-202.

[29] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

[30] Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.

[31] Ullrich D.C. Removable sets for harmonic functions// Mich. Math. J. 1991. V. 38. P. 467-473.

[32] Uy N.X. Removable set for Lipschitz harmonic functions// Mich. Math. J. 1990. V. 37. P. 45-51.

V.M. Miklyukov, **A-Solutions with singularities as almost solutions.**

Abstract. We introduce almost solutions of quasilinear differential equations with partial derivatives and bring conditions under which solutions with singularities are almost solutions.

2

Почти квазиконформные отображения как почти решения

В.М. Миклюков

В сб. Математический и прикладной анализ. Вып. 3. Тюменск. гос. ун-т. 2007. с. 59-70.

Устанавливаются связи между отображениями класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, почти квазиконформными в смысле Кэллендера, и почти решениями квазилинейных уравнений с частными производными эллиптического типа. В качестве непосредственного применения указанного результата мы приводим некоторый специальный принцип максимума для почти квазиконформных отображений, даем оценки размеров зон стагнации таких отображений.

2.1 Основная теорема

Напомним предварительно некоторые понятия. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$,

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} .$$

Через $S(a,r)$ и $B(a,r)$ мы обозначаем соответственно сферу и шар с центром в точке $a \in \mathbf{R}^n$ и радиусом $0 < r < \infty$.

Символом $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ далее обозначется множество функций f, имеющих в области $D \subset \mathbf{R}^n$ обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, суммируемые локально в D со степенью n. Вектор - функция $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbf{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$, если каждая из функций f_i $(i = 1, \ldots, m)$ принадлежит этому классу.

Согласно теореме Радемахера – Степанова всякая локально липшицева функция $f : D \to \mathbf{R}$ дифференцируема почти всюду [4, **3.1.6**] и, как легко усмотреть, всякое локально липшицево отображение $f : D \to \mathbf{R}^m$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$.

Пусть $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ – отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$. Положим

$$f'(x) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right)$$

и, далее,

$$|f'(x)| = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right]^{1/2} .$$

Следуя Кэллендеру [2] (в указанном виде см. также [9]), будем говорить, что непрерывное отображение $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ является *почти квазиконформным* в D с постоянной $K > 0$ и локально интегрируемой функцией $\sigma : D \to \mathbf{R}$, если почти всюду в области D выполнено

$$|f'(x)|^n \leq K \det\, (f'(x)) + \sigma(x)\,. \tag{2.1.1}$$

В случае $\sigma \equiv 0$ предположение (2.1.1) означает, что отображение f является *отображением с ограниченным искажением* [7, §3 глава I] или, в терминологии [8, раздел 14.1], *квазирегулярным* отображением.

Следует подчеркнуть, что условие (2.1.1) не влечет постоянства знака якобиана $\det\,(f'(x))$. Таким образом, почти квазиконформные отображения могут менять ориентацию.

Пусть $A(x,\xi) : D\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x\in D$ отображение $\xi\in\mathbf{R}^n\to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x\in D\to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi\in\mathbf{R}^n$;

(iii) для почти всех $x\in D$ и всех $\xi\in\mathbf{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$|A(x,\xi)|^{n/(n-1)}\le\mu\,\langle\xi, A(x,\xi)\rangle\,, \tag{2.1.2}$$

где $\mu>0$ – некоторая постоянная.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x,\nabla h)=0\,. \tag{2.1.3}$$

Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ является в D *обобщенным решением уравнения* (2.1.3), если для всякой функции $\varphi(x)\in C^1(D)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi\subset D$ выполнено:

$$\int\limits_D\langle\nabla\varphi, A(x,\nabla h)\rangle\,dx=0\,,$$

где $dx=dx_1\ldots dx_n$ – элемент объема.

Предположения (i) и (ii) гарантируют измеримость отображения $x\in D\to A(x,g(x))$ для произвольного измеримого на D векторного поля g (см. в [1], раздел **3**). Предположение (iii) означает 'слабую' эллиптичность (2.1.3).

Следуя [5], определим понятие *почти решения* уравнения (2.1.3). Фиксируем $\varepsilon>0$. Непрерывная функция h класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ называется *почти решением* уравнения (2.1.3), если для всякой функции

$$\varphi(x)\in C^1(D)\,,\quad 0\le|\varphi(x)|\le 1\,,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi\subset D$ выполнено:

$$\left|\int\limits_D\langle\nabla\varphi, A(x,\nabla h)\rangle\,dx\right|<\varepsilon\,. \tag{2.1.4}$$

Величина $\varepsilon > 0$ называется *ε-уклонением* почти решения h [5].

Пусть U – открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и пусть $z(x) \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U)$ – некоторая функция. Будем говорить, что $z(x)$ принадлежит классу $\mathcal{F}_+(\mu; U)$, если найдутся постоянная $\mu > 0$ и вектор-функция $\omega(x) = (\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)) \in L^{\frac{n}{n-1}}_{\mathrm{loc}}(U)$, обладающая свойствами:

α) для произвольной неотрицательной функции $\varphi \in W^{1,n}(U)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U$, выполнено

$$\int\limits_U \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(x)\,\omega_i(x)\,dx \le 0\,; \tag{2.1.5}$$

β) почти всюду на U справедливо неравенство

$$|\omega|^{n/(n-1)}(x) \le \mu\,\langle \nabla z(x),\, \omega(x)\rangle\,. \tag{2.1.6}$$

Будем говорить, что $z(x) \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(\mu; U)$, если найдутся постоянная $\mu > 0$ и вектор-функция $\omega(x) = \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x) \in L^{\frac{n}{n-1}}_{\mathrm{loc}}(U)$ такие, что выполняется неравенство (2.1.6), а неравенство (2.1.5) имеет место при любой функции $\varphi \in W^{1,n}(U)$.

Наши дальнейшие построения будут базироваться на следующем элементарном замечании: множество функций $z(x) : U \to \mathbf{R}$ класса $\mathcal{F}(\mu; U)$ (класса $\mathcal{F}_+(\mu; U)$) совпадает с множеством решений всевозможных уравнений (2.1.3) (с множеством субрешений всевозможных уравнений (2.1.3)).

Пусть $f : D \to \mathbf{R}^n$ – почти квазиконформное отображение, осуществляемое вектор-функцией $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Введем обозначение $z_f(x) = \ln|f(x)|$.

В качестве области определения функции $z_f(x)$ мы будем полагать открытое множество $U_f = D \setminus E_f$, где

$$E_f = \{x \in D : |f(x)| = 0\}\,.$$

Основной результат работы доставляет следующее утверждение.

Теорема 2.1.1. *Пусть $f : D \to \mathbf{R}^n$ – почти квазиконформное отображение с постоянной $K > 0$ и функцией $\sigma(x) \in L^1(D)$. Предположим, что существует вектор-функция $\Pi : U_f \to \mathbf{R}^n$, $\Pi \in W^{1,q}_{\rm loc}(U_f)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, такая, что почти всюду на U_f выполнено*

$$|\Pi(x)|^{n/(n-1)} \le c(n)\,\sigma(x)\,|f(x)|^{-n} + c(n)\,K\,\langle \Pi(x), \nabla z_f\rangle\,. \qquad (2.1.7)$$

Тогда функция $z_f : U_f \to \mathbf{R}$ является почти решением некоторого уравнения вида (2.1.3), удовлетворяющего предположениям (i) – (iii) с постоянной $\mu = 2^{1/(n-1)}\,K\,c(n)$ и уклонением

$$\varepsilon = \int\limits_D |\mathrm{div}\,\Pi(x)|\,dx\,.$$

Здесь

$$c(n) = n^{\frac{3n}{4(n-1)}}\,(n-1)^{-n/4}\,.$$

2.2 Доказательство основной теоремы

Рассмотрим дифференциальную $(n-1)$-форму

$$\Omega(y, dy) = |y|^{-n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} y_i\, dy_1 \wedge \ldots \widehat{dy_i} \ldots \wedge dy_n\,,$$

где знак $\widehat{\ }$ над выражением означает, что оно опускается.

Легко проверяется, что данная форма замкнута. Именно, мы имеем

$$
\begin{aligned}
d\Omega(y,dy) &= -n\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i\,dy_i\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^n(-1)^{i+n}y_i\,dy_1\wedge\ldots\widehat{dy_i}\ldots\wedge dy_n\right)\\
&+\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^n(-1)^{i+n}\,dy_i\wedge\, dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge dy_n\\
&=\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\left(-n\sum_{i=1}^n(-1)^{i+n}y_i^2\,dy_i\wedge\, dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge dy_n\right.\\
&\left.+\,n(-1)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\left(-n\sum_{i=1}^n(-1)^{n+1}y_i^2\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_i\wedge\ldots\wedge dy_n\right.\\
&\left.+\,n(-1)^{n+1}(\sum_{i=1}^n y_i^2)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n\right)=0\,.
\end{aligned}
$$

Поскольку производные функции z_f имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k}z_f=\left(\sum_{i=1}^n f_i^2(x)\right)^{-1}\sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

и, согласно определения, отображение f непрерывно, то z_f есть функция класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U_f)$.

Индуцированная $(n-1)$-форма $\Omega^*=\Omega(f(x),df(x))$ имеет коэффициенты класса $L^n_{\mathrm{loc}}(U_f)$. Покажем, что Ω^* является слабо замкнутой [6] в том смысле, что для произвольной n-формы β с компактным носителем $\operatorname{supp}\beta\subset U_f$ и коэффициентом класса $W^{1,\frac{n}{n-1}}(U_f)$ выполнено

$$\int\limits_{U_f}\left\langle\Omega^*,(-1)^{n-1}*^{-1}d*\beta\right\rangle\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n=0\,. \tag{2.2.8}$$

Ясно, что в качестве n-форм β достаточно брать C^2-формы с компактными носителями. Аппроксимируем вектор-функцию $f : U_f \to \mathbf{R}^n$ последовательностью C^2-гладких вектор-функций $f^k : U_f \to \mathbf{R}^n$, сходящейся по $W^{1,n}$-норме на подобласти U' с компактным замыканием $\overline{U'} \subset U_f$, $\operatorname{supp} \beta \subset U'$.

Пусть $\Omega_k^* = \Omega(f^k(x), d\, f^k(x))$. Мы имеем

$$\int\limits_{U_f} d\Omega_k^* \wedge *\beta = \int\limits_{U_f} d(\Omega_k^* \wedge *\beta) + (-1)^n \int\limits_{U_f} \theta_k^* \wedge d * \beta\,.$$

Так как форма β имеет компактный носитель, то по формуле Стокса первый из интегралов в правой части обращается в нуль. Отсюда,

$$\begin{aligned}\int\limits_{U_f} d\Omega_k^* \wedge *\beta &= (-1)^n \int\limits_{U_f} \Omega_k^* \wedge * *^{-1} d * \beta \\ &= -\int\limits_{U_f} \Omega_k^* \wedge *(-1)^{n-1} *^{-1} d * \beta = -\int\limits_{U_f} \langle \Omega_k^*, (-1)^{n-1} *^{-1} d * \beta\rangle\, dx_1 \ldots dx_n\end{aligned}$$

Так как $d\big(\Omega(f^k, df_k)\big) = \big(d\Omega\big)(f^k, df_k)$, то замкнута и каждая из форм Ω_k^*. Это влечет справедливость соотношения (2.2.8) при всяком $k = 1, 2, \ldots$. Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь сходимостью $f_k \to f$ по $W^{1,n}$-норме, заключаем о справедливости (2.2.8) для вектор-функции f и произвольной n-формы β. Тем самым, слабая замкнутость формы Ω^* доказана.

Рассмотрим вектор-функцию $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где

$$\omega_m = \frac{(-1)^{m+1}}{|f|^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i\, \Delta_{im}\,, \quad m = 1, \ldots, n\,.$$

Ортогональное дополнение к дифференциальной форме $\sum_{m=1}^n \omega_m\, dx_m$ степени 1 имеет вид

$$* \sum_{m=1}^n \omega_m\, dx_m = |f|^{n-1} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} f_m\, df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_m} \wedge \ldots \wedge df_m = \Omega^*\,.$$

При этом, как показано выше,

$$d * \sum_{m=1}^{n} \omega_m \, dx_m = \operatorname{div} \omega \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0 \,.$$

В соответствии со сказанным в разделе 1.3, существует вектор-функция A такая, что

$$A(x, \nabla z_f(x)) = \omega(x) + \Pi(x) \,.$$

Функция z_f удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \left(A(x, \nabla z_f(x)) - \Pi(x)\right) = 0$. Для произвольной неотрицательной функции φ с компактным носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset D$ и свойствами

$$\varphi(x) \in C^1(D) \,, \quad 0 \le \varphi(x) \le 1$$

выполнено

$$\left| \int\limits_{U_f} \langle A(x, \nabla z_f), \nabla \varphi \rangle \, dx \right| \le \left| \int\limits_{U_f} \langle \omega, \nabla \varphi \rangle \, dx + \int\limits_{U_f} \langle \Pi, \nabla \varphi \rangle \, dx \right|$$

$$= \left| \int\limits_{U_f} \langle \varphi, \nabla \Pi \rangle \, dx \right| \le \int\limits_{U_f} \left| \operatorname{div} \Pi \right| \, dx < \varepsilon \,.$$

Таким образом, функция $z = z_f$ является почти решением уравнения $\operatorname{div} A(x, z) = 0$.

Нам осталось доказать, что имеет место соотношение (2.1.6) и, тем самым, (2.1.2). Заметим сначала, что

$$\langle \Omega^*, \nabla z_f \rangle = |f|^{-(n+2)} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+n} f_i f_j \langle df_i, *(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots df_n) \rangle$$

$$= |f|^{-n} J(x, f)$$

и, далее,

$$\begin{aligned}\langle A, \nabla z_f\rangle &= \langle \Omega^*, \nabla z_f\rangle + \langle \Pi, \nabla z_f\rangle \\ &= |f|^{-n} J(x,f) + \langle \Pi, \nabla z_f\rangle \\ &\geq \frac{1}{K}\,|f|^{-n}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2\right]^{n/2} - \sigma(x)\right) + \langle \Pi, \nabla z_f\rangle\,.\end{aligned}$$

Тем самым, почти всюду на U_f выполняется неравенство

$$\begin{aligned}|f|^{-n}\left[\sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2\right]^{n/2} \quad &+K\,\langle \Pi, \nabla z_f\rangle - \sigma(x)|f|^{-n} \\ &\leq K\,\langle A, \nabla z_f\rangle\,.\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Таким образом, мы имеем

$$|A(x, \nabla z_f)| \leq |\Omega^*| + |\Pi|\,.$$

Величина

$$\left(\frac{|\Omega^*|^t}{2} + \frac{|\Pi|^t}{2}\right)^{1/t}$$

является неубывающей функцией переменной $t \in (-\infty, +\infty)$ (см., например, [1, стр. 30]). Поэтому при любом $n > 1$ выполнено

$$\frac{|\Omega|^*}{2} + \frac{|\Pi|}{2} \leq \left(\frac{|\Omega^*|^{n/(n-1)}}{2} + \frac{|\Pi|^{n/(n-1)}}{2}\right)^{(n-1)/n}$$

и, следовательно,

$$|A(x, \nabla z_f)|^{n/(n-1)} \leq 2^{1/(n-1)}\left(|\Omega^*|^{n/(n-1)} + |\Pi|^{n/(n-1)}\right)\,. \tag{2.2.10}$$

Нетрудно видеть, что

$$
\begin{aligned}
|\Omega^*|^{n/(n-1)} &= \Omega(f(x), df(x)) = |f|^{-n^2/(n-1)} \left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} f_i \, df_1 \wedge \ldots \widehat{df_i} \ldots \wedge df_n \right|^{n/(n-1)} \\
&\le c(n) \, |f|^{-n} \, \left[\sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2 \right]^{n/2} ,
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

где $c(n)$ – некоторая постоянная, которая будет указана ниже.

Поэтому, объединяя (2.2.9) и (2.2.10), приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
|A(x, \nabla z_f)|^{n/(n-1)} \; &\le \; 2^{1/(n-1)} c(n) \, |f|^{-n} \left[\sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2 \right]^{n/2} + 2^{1/(n-1)} \, |\Pi|^{n/(n-1)} \\
&\le 2^{1/(n-1)} \, |\Pi|^{n/(n-1)} \\
&+ 2^{1/(n-1)} \, c(n) \, \left(K \langle A, z_f \rangle - K \left\langle \Pi, \nabla z_f \right\rangle - \sigma(x) \, |f|^{-n} \right) .
\end{aligned}
$$

Предположение (2.1.7) влечет теперь, что

$$
|A(x, \nabla z_f)|^{n/(n-1)} \le 2^{1/(n-1)} \, K \, c(n) \, \langle A, \nabla z_f \rangle
$$

и требование (2.1.2) на символ A действительно выполнено.

Для доказательства теоремы нам осталось оценить постоянную $c(n)$. Мы имеем

$$
\Omega^* = (\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \ ,
$$

где

$$
\Omega_m = \frac{(-1)^{m+1}}{|f|^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \, \Delta_{im}
$$

и

$$
\Delta_{im} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)} \, .
$$

Поэтому

$$\begin{aligned}|\Omega^*| \ &\le |f|^{-n}\ \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}(-1)^{i-1}f_i\,\Delta_{im}\right)^2\right]^{1/2}\\ &\le |f|^{-n}\ \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}|f_i|^2\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\Delta_{im}^2\right)\right]^{1/2}\\ &\le |f|^{-n}\left[n\sum_{i=1}^{n}\ f_i^2\left(\sum_{m=1}^{n}\Delta_{im}^2\right)\right]^{1/2}\\ &\le |f|^{-n}\left[n\sum_{i=1}^{n}\ f_i^4\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\Delta_{im}^2\right)^2\right]^{1/4}.\end{aligned}$$

Однако, при $\alpha \ge 2$ выполняется [1, стр. 32]

$$(a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)^{1/\alpha} \le \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}|f_i|^4 \le \left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^2 \le |f|^4\,.$$

Тем самым, мы получаем

$$|\Omega^*| \le n^{1/4}|f|^{-n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\Delta_{im}^2\right)^2\right]^{1/4}. \tag{2.2.12}$$

В силу неравенства Адамара для определителей [3, стр. 230] и неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим имеем

$$|\Delta_{im}|^2 \le \prod_{\substack{p=1\\p\ne i}}^{n}\left(\sum_{\substack{q=1\\q\ne m}}^{n}f'^2_{px_q}\right) \le \left(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{p=1\\p\ne i}}^{n}\left(\sum_{\substack{q=1\\q\ne m}}^{n}f'^2_{px_q}\right)\right)^{n-1}$$

или,

$$|\Delta_{im}|^2 \leq (n-1)^{1-n} \left[\sum_{p=1}^{n} |\nabla f_p|^2\right]^{n-1}.$$

Тем самым, на основании (2.2.12) находим

$$|\Omega^*| \leq n^{3/4}(n-1)^{(1-n)/4} \, |f|^{-n+1} \left[\sum_{p=1}^{n} |\nabla f_p|^2\right]^{(n-1)/2}. \tag{2.2.13}$$

Неравенство (2.2.13) влечет выполнение соотношения (2.2.11) с постоянной $c(n)$, как в теореме 2.1.1.

□

Список литературы

[1] Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, М: Мир, 1965ю

[2] E.D. Callender, Hölder-continuity of N-dimensional quasiconformal mappings, Pacific J. Math., v. 10, 1960, 49-515.

[3] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, М.: Наука, 1967.

[4] Г. Федерер, Геометрическая теория меры, М.: Наука, 1987.

[5] В.М. Миклюков, Решения с особенностями как почти-решения, ДАН России, т. 410, n. 6, 2006, 1-3.

[6] D. Franke, O. Martio, V. M. Miklyukov, M. Vuorinen, and R. Wisk: Quasiregular mappings and $\mathcal{WT}$ -classes of differential forms on Riemannian manifolds. – Pacific J. Math., v. 202, n. 1, 2002, 73-92.

[7] Yu.G. Reshetnyak, Space Mappings with Bounded Distortion. - Translations of Mathematical Monographs 73, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[8] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. - Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[9] V.M. Miklyukov, On maps almost quasi-conformally close to quasi-isometries. Печатн. Reports of the Depart. of Math., Preprint 425, Dec. 2005, Univ. of Helsinki, 26 pp.

3

Принцип максимума для разности почти решений нелинейных эллиптических уравнений

В.М. Миклюков

Вестник Томского государственного ун-та.
Математика и механика, N 1, 2007, с. 33-45.

Доказывается принцип максимума для разности почти решений p-гармонического уравнения, уравнения минимальной поверхности и уравнения газовой динамики.

3.1 Класс уравнений

Условимся в обозначениях. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $n \geq 1$, со стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и модулем $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}^1$ – измеримая по Лебегу, неотрицательная и почти всюду конечная функция.

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x, \xi)$ определено и непрерывно;

(ii) отображение $x \in D \to A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\mu_1 \, k(x) \, |\xi|^\alpha \le \langle \xi, A(x, \xi) \rangle \,, \tag{3.1.1}$$

$$|A(x, \xi)| \le \mu_2 \, k(x) \, |\xi|^{\alpha - 1} \,, \tag{3.1.2}$$

где $\alpha > 1$ и μ_1, $\mu_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\mu = \mu_2/\mu_1$. Ясно, что всегда $\mu \ge 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0 \,. \tag{3.1.3}$$

Уравнения описанного вида называются A-гармоническими [HKM93]. Следует отметить, однако, что в монографии [HKM93] предполагаются более жесткие ограничения на весовую функцию $k(x)$. В частности, предполагается, например, чтобы $k(x)$ была ограничена сверху и отграничена от нуля в существенном на компактных подмножествах области D и др. [HKM93, стр. 7]. На наш взгляд, подобные ограничения при описании класса уравнений излишни, поскольку носят во-многом технический характер.

Простой пример A-гармонического уравнения доставляет уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2} \nabla h) = 0 \,, \quad p > 1. \tag{3.1.4}$$

Решения h уравнения (3.1.4) называются *p-гармоническими* функциями, а само уравнение – p-гармоническим [HKM93, глава 6].

3.2 Почти решения

Символом $C(E)$ ниже обозначается класс функций, непрерывных на множестве E, символом $C^k\,(D)$ – множество функций, имеющих производные порядка k, $k = 1, 2, \ldots$, в области D, символом $C^{1,1}(D)$ – множество функций класса $C^1(D)$ с производными первого порядка, удовлетворяющими условию Липшица локально в D.

Функция h принадлежит классу $W^{1,\alpha}(D)$, $\alpha \geq 1$, если она имеет обобщенные в смысле С.Л. Соболева частные производные $\partial h/\partial x_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, суммируемые по D со степенью α. Функция h принадлежит классу $W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(D)$, если она принадлежит классу $W^{1,\alpha}(D')$ на всякой подобласти $D' \Subset D$. Последнее означает, что замыкание D' компактно и содержится в D.

Определение 1. *Непрерывная функция* $h : D \to \mathbb{R}^1$ *класса* $W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(D)$ *является почти решением уравнения* (3.1.3) *, если для всякой функции*

$$\phi \in W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(D) \cap C(D)\,, \quad 0 \leq \phi \leq 1\,, \quad \operatorname{supp} \phi \subset D\,, \tag{3.2.5}$$

выполнено

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\phi, A(x, \nabla h)\rangle \, d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon\,, \tag{3.2.6}$$

где $d\mathcal{H}^n$ – элемент n-мерной меры Лебега.

Величина $\varepsilon \geq 0$ называется *уклонением* почти решения h [Mikl06a].

Поясним введенное понятие в случае, когда $\varepsilon = 0$. Если множество ∂D является счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемым, то оно имеет локально конечный периметр в смысле Де-Джорджи и $\mathcal{H}^{n-1}$ – почти всюду на ∂D существует единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ [Fed69, §**3.2**]. Простые соображения, опирающиеся на обобщенную формулу Остроградского - Гаусса для $C^{1,1}$-функций в областях с $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемыми границами (см. [Mikl06b, теорема 2.6.2]), показывают, что принадлежность h классу $C^{1,1}\left(\overline{D}\right)$ и выполнение (3.2.6) с указанным произволом на функцию ϕ влекут выполнение соотношения (3.1.3) в стандартном смысле.

3.3 Ключевое свойство

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и

$$\widetilde{A}(x, \xi) : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

– измеримая в смысле Лебега вектор-функция.

Пусть $h : D \to \mathbb{R}^1$ – непрерывная функция класса $W^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$, являющаяся почти решением уравнения

$$\operatorname{div} \widetilde{A}(x, \nabla h) = 0\,. \tag{3.3.7}$$

Определение 2. *Будем говорить, что вектор-функция $\widetilde{A}(x,\xi)$ удовлетворяет условиям (3.1.1) – (3.1.2) на почти решении h, если вектор-функция*

$$\widetilde{A}(x, \nabla h(x)) : D \to \mathbb{R}^n$$

обладает свойствами (3.1.1) – (3.1.2), т.е. почти всюду в D выполнено

$$\mu_1\, k(x)\, |\nabla h(x)|^\alpha \le \langle \nabla h(x), \widetilde{A}(x, \nabla h(x))\rangle\,, \tag{3.3.8}$$

$$|\widetilde{A}(x, \nabla h(x))| \le \mu_2\, k(x)\, |\nabla h(x)|^{\alpha-1}\,. \tag{3.3.9}$$

Ключевым в нашем подходе является следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть h_1, $h_2 : D \to \mathbb{R}^1$ – почти решения уравнения (3.1.4). Тогда функция $h = h_2 - h_1$ является почти решением уравнения (3.3.7), где*

$$\widetilde{A}(x,\xi) = |\nabla h_2(x)|^{p-2}(\nabla h_1(x) + \xi) - |\nabla h_1(x)|^{p-2}(\nabla h_2(x) - \xi)\,, \tag{3.3.10}$$

удовлетворяющего условиям (3.1.1) – (3.1.2) на почти решении h с $\alpha = 2$.

При этом можно положить

$$k(x) = \int\limits_0^1 |\lambda\, \nabla h_2(x) + (1-\lambda)\, \nabla h_1(x)|^{p-2}\, d\lambda\,,$$

$$\mu_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } p \ge 2\,, \\ p-1 & \text{при } 1 < p < 2\,, \end{cases} \qquad \mu_2 = 1 + |p-2| \text{ при } p > 1\,,$$

и если уклонения h_1, h_2 суть $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ соответственно, то уклонение почти решения h равно $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Доказательство. Так как h_i $(i=1,2)$ суть почти решения уравнения (3.1.4), то для всякой функции φ со свойствами (3.2.5) выполнено

$$\left|\int\limits_D \langle \nabla\varphi, |\nabla h_i|^{p-2}\nabla h_i\rangle \, d\mathcal{H}^n\right| \le \varepsilon_i\,, \quad i=1,2\,.$$

Отсюда, для всякой функции φ указанного вида имеет место соотношение

$$\left|\int\limits_D \langle \nabla\varphi, |\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\rangle \, d\mathcal{H}^n\right| \le \varepsilon_1+\varepsilon_2\,. \tag{3.3.11}$$

Выполнение (3.3.11) означает, что функция $h=h_2-h_1$ является почти решением уравнения (3.3.7) с $\widetilde{A}$ вида (3.3.10) и уклонением $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Нам необходимо проверить, что $\widetilde{A}(x,\xi)$ удовлетворяет условиям (3.3.8) – (3.3.9) при $h=h_2-h_1$ с $\alpha=2$.

Мы воспользуемся подходом, использованным в [MV00] при доказательстве теоремы 1.1. Положим

$$\Phi(\lambda)=|\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)|^{p-2}\,\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)\,, \quad \lambda\in[0,1]\,.$$

Мы имеем

$$\Phi(0)=|\nabla h_1|^{p-2}\,\nabla h_1\,, \quad \Phi(1)=|\nabla h_2|^{p-2}\,\nabla h_2\,.$$

Отсюда находим

$$|\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2-|\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1=\Phi(1)-\Phi(0)=\int\limits_0^1 \Phi'(\lambda)\,d\lambda= \tag{3.3.12}$$

$$=\int\limits_0^1 \big[(\nabla h_2-\nabla h_1)|\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)|^{p-2}+(p-2)\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)\times$$

$$\times\,|\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)|^{p-4}\langle\nabla h_2-\nabla h_1,\,\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)\rangle\big]\,d\lambda$$

и

$$\langle\nabla h_2-\nabla h_1,\,|\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2-|\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\rangle= \tag{3.3.13}$$

$$= |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda +$$

$$+(p-2)\int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1,\ \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)\rangle^2\, d\lambda\,.$$

Если $p \geq 2$, то

$$\langle \nabla h_2 - \nabla h_1,\ |\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\rangle \geq$$
$$\geq |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda = |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2\, k(x)\,. \tag{3.3.14}$$

Пусть $1 < p \leq 2$. Заметим сначала, что

$$\int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1,\ \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)\rangle^2\, d\lambda \leq$$

$$\leq |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda$$

и

$$|\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda +$$

$$+(p-2)\int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1,\ \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)\rangle^2\, d\lambda \geq$$

$$\geq (p-1)|\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda\,.$$

Тем самым, соотношение (3.3.13) при $1 < p \le 2$ влечет

$$\langle \nabla h_2 - \nabla h_1,\, |\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\rangle \ge (p-1)|\nabla h_2 - \nabla h_1|^2\, k(x)\,. \tag{3.3.15}$$

Соотношения (3.3.14), (3.3.15) означают справедливость (3.3.8).

Проверим выполнение неравенства (3.3.9) при $h = h_2 - h_1$ и $\alpha = 2$. Предположим сначала, что $p \ge 2$. Здесь (3.3.12) приводит к оценке

$$\big||\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\big| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^1 (\nabla h_2 - \nabla h_1)|\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda\right| +$$

$$+(p-2)\Big|\int\limits_0^1 \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4}\times$$

$$\times\langle \nabla h_2 - \nabla h_1,\, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)\rangle\, d\lambda\Big|$$

и

$$\big||\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\big| \le$$

$$\le (p-1)|\nabla h_2 - \nabla h_1| \int\limits_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda =$$

$$= (p-1)|\nabla h_2 - \nabla h_1|\, k(x)\,. \tag{3.3.16}$$

В случае $1 < p \le 2$ имеем

$$\big||\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\big| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^1 (\nabla h_2 - \nabla h_1)|\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2}\, d\lambda\right| +$$

$$+(2-p)\left|\int\limits_0^1 \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4}\times\right.$$

$$\times\langle\nabla h_2-\nabla h_1,\, \nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)\rangle\, d\lambda\Big|$$

и

$$\big||\nabla h_2|^{p-2}\nabla h_2-|\nabla h_1|^{p-2}\nabla h_1\big|\leq$$

$$\leq(1+|p-2|)|\nabla h_2-\nabla h_1\int\limits_0^1|\nabla(\lambda h_2+(1-\lambda)h_1)|^{p-2}\,d\lambda=$$

$$=(1+|p-2|)|\nabla h_2-\nabla h_1\,k(x)\,. \qquad (3.3.17)$$

Оценки (3.3.16), (3.3.17) обеспечивают выполнение (3.3.9) с $\alpha=2$ и заявленной постоянной μ_2. □

3.4 Функция $I(\xi,\eta)$

Если положить,

$$I_p(\xi,\eta)=\int\limits_0^1|\lambda\,\xi+(1-\lambda)\,\eta|^{p-2}\,d\lambda\,,$$

то определенная в лемме 1 функция $k(x)$ имеет вид

$$k(x)=I_p(\nabla h_1(x),\,\nabla h_2(x))\,. \qquad (3.4.18)$$

Укажем некоторые свойства функции $I_p(\xi,\eta)$. Прежде всего мы заметим, что для любого $\lambda\in[0,1]$ выполнено

$$|\,\lambda|\xi|-(1-\lambda)|\eta|\,|\leq|\lambda\xi-(1-\lambda)\eta|\leq\lambda|\xi|+(1-\lambda)|\eta|\,. \qquad (3.4.19)$$

Пусть $p\geq 2$. Предположим, что $|\xi|>|\eta|$. Пользуясь (3.4.19), имеем

$$I_p(\xi,\eta)\leq\int\limits_0^1\left(\lambda(|\xi|-|\eta|)+|\eta|\right)^{p-2}\,d\lambda= \qquad (3.4.20)$$

$$= \frac{1}{|\xi| - |\eta|} \int\limits_{|\eta|}^{|\xi|} \tau^{p-2} d\tau = \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|}\,.$$

С другой стороны, на основании (3.4.19) находим

$$I_p(\xi,\eta) \geq \int\limits_0^1 \left|\lambda|\xi| - (1-\lambda)|\eta|\right|^{p-2} d\lambda = \int\limits_0^1 \left|\lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|\right|^{p-2} d\lambda =$$

$$= \int\limits_s^1 \left|\lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|\right|^{p-2} d\lambda + \int\limits_0^s \left||\eta| - \lambda(|\xi| + |\eta|)\right|^{p-2} d\lambda\,,$$

где

$$s = \frac{|\eta|}{|\xi| + |\eta|}\,. \tag{3.4.21}$$

Вычисляя последние два интеграла, получаем

$$I_p(\xi,\eta) \geq \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}}{|\xi| + |\eta|}\,, \quad p \geq 2. \tag{3.4.22}$$

Пусть $1 < p < 2$. Как и выше, предположим, что $|\xi| > |\eta|$. В соответствии с (3.4.19) можем записать

$$I_p(\xi,\eta) \leq \int\limits_0^1 \left|\lambda|\xi| - (1-\lambda)|\eta|\right|^{p-2} d\lambda = \int\limits_0^1 \left|\lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|\right|^{p-2} d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^s \left||\eta| - \lambda(|\xi| + |\eta|)\right|^{p-2} d\lambda + \int\limits_s^1 \left|\lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|\right|^{p-2} d\lambda\,,$$

где величина $s > 0$ определена равенством (3.4.21). Таким образом, находим

$$I_p(\xi,\eta) \leq \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}}{|\xi| + |\eta|}\,, \quad 1 < p < 2\,. \tag{3.4.23}$$

Наконец, вычисляя как в (3.4.20), получаем

$$I_p(\xi,\eta) \geq \frac{1}{p-1}\frac{|\xi|^{p-1}-|\eta|^{p-1}}{|\xi|-|\eta|}, \quad 1<p<2. \tag{3.4.24}$$

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$c_1(p)\,\frac{|\xi|^{p-1}-|\eta|^{p-1}}{|\xi|-|\eta|} \leq \frac{|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1}}{|\xi|+|\eta|} \leq c_2(p)\,\frac{|\xi|^{p-1}-|\eta|^{p-1}}{|\xi|-|\eta|}, \quad p>1, \tag{3.4.25}$$

$$c_3(p)\left(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2}\right) \leq \frac{|\xi|^{p-1}-|\eta|^{p-1}}{|\xi|-|\eta|} \leq c_4(p)\left(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2}\right), \quad p\geq 2, \tag{3.4.26}$$

$$\frac{c_5(p)}{|\xi|^{2-p}+|\eta|^{2-p}} \leq \frac{|\xi|^{p-1}-|\eta|^{p-1}}{|\xi|-|\eta|} \leq \frac{c_6(p)}{|\xi|^{2-p}+|\eta|^{2-p}}, \quad 1<p<2, \tag{3.4.27}$$

где

$$c_1(p) = \inf_{1<x<\infty}\lambda_1(x), \quad c_2(p) = \sup_{1<x<\infty}\lambda_1(x),$$

$$c_3(p) = \inf_{1<x<\infty}\lambda_2(x), \quad c_4(p) = \sup_{1<x<\infty}\lambda_2(x),$$

$$c_5(p) = \inf_{1<x<\infty}\lambda_3(x), \quad c_6(p) = \sup_{1<x<\infty}\lambda_3(x),$$

и

$$\lambda_1(x) = \frac{(x^{p-1}+1)(x-1)}{(x^{p-1}-1)(x+1)},$$

$$\lambda_2(x) = \frac{(x^{p-1}-1)}{(x-1)(x^{p-2}+1)},$$

$$\lambda_3(x) = \frac{1}{x-1}(x^{p-1}-1)(x^{2-p}+1).$$

Доказательство. В случае (3.4.25) имеем

$$\lim_{x\to 1} \lambda_1(x) = \frac{1}{p-1}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \lambda_1(x) = 1\,.$$

Функция $\lambda_1(x)$ непрерывна на $(1,\infty)$ и не обращается в нуль. Тем самым,

$$0 < c_1(p) \le c_2(p) < \infty$$

и

$$c_1(p)\,\frac{x^{p-1}-1}{x-1} \le \frac{x^{p-1}+1}{x+1} \le c_2(p)\,\frac{x^{p-1}-1}{x-1} \quad \text{при всех } x \in (1,\infty)\,.$$

Это влечет справедливость (3.4.25).

В точности так же проверяются оценки (3.4.26), (3.4.27).

Подробности см. в [MRV07], леммы 3.5 и 3.6. □

Замечание. В общем случае постоянные $c_1(p) - c_6(p)$ присутствуют в оценках весовой функции $k(x)$ (см. соотношение (3.4.18) и лемму 3 ниже) и потому было бы желательно знать их точные значения, как это сделано в [By05] в близких целях. □

Объединяя найденные выше оценки (3.4.20), (3.4.22) — (3.4.24) для $I_p(\xi,\eta)$ и (3.4.25) — (3.4.27), приходим к высказыванию:

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$c_8(p)\,(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2}) \le I_p(\xi,\eta) \le c_9(p)\,(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2})\,,\ p \ge 2\,, \tag{3.4.28}$$

и

$$c_{10}(p)\,(|\xi|^{2-p}+|\eta|^{2-p})^{-1} \le I_p(\xi,\eta) \le c_{11}(p)\,(|\xi|^{2-p}+|\eta|^{2-p})^{-1}\,,\ 1 < p \le 2\,, \tag{3.4.29}$$

где

$$c_8(p) = \frac{1}{p-1}c_1(p)\,c_3(p)\,, \quad c_9(p) = \frac{1}{p-1}c_4(p)\,,$$

$$c_{10}(p) = \frac{1}{p-1}c_5(p)\,, \quad c_{11}(p) = \frac{1}{p-1}c_2(p)\,c_6(p)\,.$$

3.5 Принцип максимума

Напомним необходимые понятия из [Mikl06a]. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и A, B – непустые, замкнутые относительно D, непересекающиеся подмножества. Обозначим через

$$\operatorname{cap}_k(A,B) = \inf_u \int\limits_D k(x)\,|\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^n, \quad u \in C^1(D)\,, \quad u|_A \equiv 0, \quad u|_B \equiv 1\,,$$

взвешенную k-емкость конденсатора $(A, B; D)$ и через

$$\lambda_k(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla u|^2 d\mathcal{H}^n}{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, u^2 d\mathcal{H}^n}\,, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{3.5.30}$$

взвешенную основную частоту открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является *k-узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{cap}_k(D_r, D \setminus D_R) = 0\,,$$

где $D_t = \{|x| < t\} \cap D$.

Теорема 7.1.1 из [Mikl07] и лемма 1 влекут справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть h_1, h_2 – почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ p-гармонического уравнения* (3.1.4)*, удовлетворяющие предположению*

$$\limsup_{x\to x_0} (h_1(x) - h_2(x)) \le 0\,, \quad x \in D,\, x_0 \in \partial D. \tag{3.5.31}$$

Тогда либо $h_1(x) \le h_2(x)$ всюду в D, либо открытое множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla(h_2 - h_1)|^2\, d\mathcal{H}^n \le \frac{M}{\mu_1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \tag{3.5.32}$$

$$+2\mu^2 M^2 \operatorname{cap}_k(\mathcal{O}_r, \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_R),$$

где $M = \sup_D |h_2(x) - h_1(x)|$.

В частности, если D ограничена или является k-узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\ (h_2(x) - h_1(x))^2\ d\mathcal{H}^n \leq \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)M}{\mu_1\, \lambda_k(\mathcal{O})}.$$

3.6 Цилиндрические области

Мы ограничимся иллюстрацией разрабатываемых методов на примере p-гармонических функций в цилиндрических областях. В конических и других, достаточно "правильных" областях $\mathbb{R}^n$ могут быть использованы близкие конструкции. Рассмотрение же общего случая требует техники, достаточно далеко отстоящей от развиваемой в этой работе (см., например, [Mikl07, разделы 1.1 и 1.2]) и требует самостоятельного исследования.

Пусть Δ – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $D = \Delta \times (0, +\infty)$ – полуцилиндр. Выясним условия, при которых область D является k-узкой.

Будем предполагать, что Δ лежит в гиперплоскости $x_n = 0$ так, что $x = (x', x_n) \in D$, тогда и только тогда, когда $x' \in \Delta$ и $x_n > 0$. Положим

$$x_n(r) = \max\{x_n : x \in D \cap \Sigma(0, r)\}, \quad \Sigma(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}.$$

Пусть

$$D(t) = \{x = (x', x_n) \in D : x_n = t\}, \quad t > 0,$$

и пусть $D^-(t)$, $D^+(t)$ означают соответственно ограниченную и неограниченную компоненты связности множества $D \setminus D(t)$. Зафиксируем $0 < r < R < \infty$ так, чтобы цилиндрическая область $D_{r,R}$, заключенная между плоскими сечениями $D(x_n(r))$ и $D(x_n(R))$ была непустой. Так как область $D_{r,R}$ лежит в D между D_r и $D \setminus D_R$, то имеет место следующее соотношение между k-емкостями

$$\operatorname{cap}_k(D_r, D \setminus D_R) \leq \operatorname{cap}_k(D^-(x_n(r)),\ D^+(x_n(R))). \tag{3.6.33}$$

Обозначим через $\tilde{k}(t)$ величину $\operatorname{ess}\sup\limits_{x \in D(t)} k(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{cap}_k(D^-(x_n(r)),\ D^+(x_n(R))) \leq \operatorname{cap}_{\tilde{k}}(D^-(x_n(r)),\ D^+(x_n(R))). \tag{3.6.34}$$

Пусть $u(x)$ – произвольная функция, допустимая при вычислении $\tilde{k}$-емкости конденсатора $(D^-(x_n(r)),\ D^+(x_n(R)))$. В силу интегрального неравенства Коши, при любом $x' \in \Delta$ имеем

$$1 \le \left(\int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} |\nabla\varphi(x',x_n)|\,dx_n\right)^2 \le \int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} \tilde{k}(x_n)\,|\nabla\varphi(x',x_n)|^2\,dx_n \int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)}\,.$$

Отсюда,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Delta)\left(\int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)}\right)^{-1} \le \int\limits_{\Delta} d\mathcal{H}^{n-1} \int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} \tilde{k}(x_n)\,|\nabla\varphi(x',x_n)|^2\,dx_n =$$

$$= \int\limits_{D_{r,R}} \tilde{k}(x_n)\,|\nabla\varphi(x',x_n)|^2\,d\mathcal{H}^n\,,$$

и переходя в правой части к точной нижней грани по всем допустимым функциям φ, находим

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Delta)\left(\int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)}\right)^{-1} \le \operatorname{cap}_{\tilde{k}}(D^-(x_n(r)),\ D^+(x_n(R)))\,.$$

Найденая оценка является точной и достигается на функции

$$\varphi(x',x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_n \le x_n(r)\,, \\ \int\limits_{x_n}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)} \left(\int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)}\right)^{-1} & \text{при} \quad x_n(r) < x_n < x_n(R)\,, \\ 0 & \text{при} \quad x_n \ge x_n(R)\,. \end{cases}$$

Тем самым, мы получаем

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Delta)\left(\int\limits_{x_n(r)}^{x_n(R)}\frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)}\right)^{-1} = \mathrm{cap}_{\tilde{k}}(D^-(x_n(r)),\, D^+(x_n(R)))\,. \qquad (3.6.35)$$

Сопоставляя (3.6.33), (3.6.34) и (3.6.35), приходим к высказыванию:

Лемма 4. *Если весовая функция k удовлетворяет условию*

$$\int^{+\infty}\frac{dt}{\tilde{k}(t)} = +\infty\,, \quad \tilde{k}(t) = \operatorname{ess}\sup_{x\in D(t)} k(x)\,, \qquad (3.6.36)$$

то цилиндрическая область D является k-узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$.

Пусть $h_1\,, h_2$ – почти-решения в

$$D = \Delta\times(0,+\infty)$$

некоторого p-гармонического уравнения. Положим

$$q(x) = \begin{cases} |\nabla h_1(x)|^{p-2} + |\nabla h_2(x)|^{p-2} & \text{при} \quad p\ge 2\,,\\ (|\nabla h_1(x)|^{2-p} + |\nabla h_2(x)|^{2-p})^{-1} & \text{при} \quad 1<p<2\,, \end{cases}$$

и, далее,

$$\tilde{q}(t) = \operatorname{ess}\sup_{x\in D(t)} q(x)\,, \quad t>0\,.$$

Заметим, что в силу соотношений (3.4.28) – (3.5.30) имеем

$$c_{12}(p)\,\lambda_q(\mathcal{O}) \le \lambda_k(\mathcal{O}) \le c_{13}(p)\,\lambda_q(\mathcal{O})\,,$$

где

$$c_{12}(p) = \begin{cases} \dfrac{c_8}{c_9} & \text{при} \quad p\ge 2\,,\\[2mm] \dfrac{c_{10}}{c_{11}} & \text{при} \quad 1<p<2\,, \end{cases} \qquad c_{13}(p) = \begin{cases} \dfrac{c_9}{c_8} & \text{при} \quad p\ge 2\,,\\[2mm] \dfrac{c_{11}}{c_{10}} & \text{при} \quad 1<p<2\,. \end{cases}$$

Пользуясь леммами 3 и 4, на основании теоремы 1 получаем:

Теорема 2. *Пусть $h_1\,, h_2$ – ограниченные почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ в цилиндрической области $D = \Delta \times (0, +\infty)$ некоторого p-гармонического уравнения* (3.1.4)*, причем*

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{\tilde{q}(t)} = +\infty\,. \qquad (3.6.37)$$

Предположим, что всюду на границе D имеет место (3.5.31)*. Тогда либо $h_1(x) \le h_2(x)$ всюду в D, либо открытое множество*

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и для любого $r > 0$ выполнено

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} q(x)\ (h_2(x) - h_1(x))^2\ d\mathcal{H}^n \le \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)M}{c_{14}(p)\,\lambda_q(\mathcal{O})}\,, \qquad (3.6.38)$$

где

$$c_{14}(p) = \begin{cases} c_8 & \text{\textit{при}} \quad p \ge 2\,, \\ c_{10} & \text{\textit{при}} \quad 1 < p < 2\,. \end{cases}\,.$$

3.7 Сильно нелинейные уравнения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее предположениям (i), (ii) раздела 1.1. Вместо (iii) мы будем предполагать, что имеет место свойство:

(iv) для почти всех $x \in D$ и любых ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\nu\, k(x)\, |A(x,\xi) - A(x,\eta)|^2 \le \langle \xi - \eta, A(x,\xi) - A(x,\eta)\rangle\,, \qquad (3.7.39)$$

где $\nu > 0$ – постоянная и $k(x) \ge 0$ – измеримая функция.

В некоторых случаях имеет смысл предполагать, что символ $A(x,\xi)$ подчинен условию:

$$A(x,\xi) = A(x,\eta) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \xi = \eta\,. \qquad (3.7.40)$$

Условиям (3.7.39) с $\nu = 1$, $k(x) \equiv 1$ и (3.7.40) удовлетворяет уравнение минимальной поверхности

$$\operatorname{div}\frac{\nabla h(x)}{\sqrt{1+|\nabla h(x)|^2}} = 0 \tag{3.7.41}$$

(см. [Mik79] – [PRS02]).

Другой пример доставляет одно уравнение газовой динамики

$$\operatorname{div}\,(\sigma(|\nabla h(x)|)\,\nabla h(x)) = 0\,, \quad \sigma(t) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}t^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,, \tag{3.7.42}$$

где γ – постоянная, характеризующая поток субстанции [Bers61, §2], [LS73, §2].

В [KKM] установлено, что в случае постоянной $-\infty < \gamma \le -1$ уравнение (3.7.42) удовлетворяет (3.7.39) с $\nu = 1$, $k(x) \equiv 1$ и (3.7.40). При $\gamma > -1$ в [KKM] указаны некоторые оценки множества, на котором выполнено (3.7.39).

3.8 Разности почти решений

Пусть h_1 и h_2 – произвольная пара почти решений уравнения (3.1.3) в области $D \subset \mathbb{R}^n$ такие, что в каждой граничной точке $x_0 \in \partial D$ выполнено

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} (h_1(x) - h_2(x)) \le 0\,. \tag{3.8.43}$$

Предположим, что в некоторой точке $a \in D$ выполнено $h_1(a) > h_2(a)$. Обозначим через $\mathcal{O}$ открытое множество

$$\{x \in D : h_1(x) - h_2(x) > 0\}\,,$$

содержащую точку a.

Всюду на границе $\partial\mathcal{O}$ имеем $h_1(x) - h_2(x) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) - h_2(x) & \text{при} \quad x \in \mathcal{O}\,, \\ 0 & \text{при} \quad x \in D \setminus \mathcal{O}\,. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна, неотрицательна и принадлежит классу $W^{1,p}(D)$.

Зафиксируем $r > 0$ так, чтобы пересечение шара

$$B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$$

с областью $\mathcal{O}$ было непусто, и $R > r$. Пусть $\psi(|x|) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – непрерывная функция, равная 1 на $B(0,r)$, обращающаяся в 0 на $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$, принадлежащая классу $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ и такая, что $0 \leq \psi(x) \leq 1$.

Не ограничивая общности, можем считать, что функция $\varphi(x) = \psi^2(x)\, f(x)$ финитна в области D. Если уклонения почти решений h_1 и h_2 суть $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, то, в силу (3.2.5), имеем

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h_1)\rangle \, d\mathcal{H}^n - \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h_2)\rangle \, d\mathcal{H}^n \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)\rangle \, d\mathcal{H}^n \right| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, M\,,$$

где

$$M = \max_{\mathcal{O}} \left(h_1(x) - h_2(x)\right)\,.$$

Отсюда находим

$$\left| \int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,R)} \psi^2 \langle \nabla h_1 - \nabla h_2, A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)\rangle \, d\mathcal{H}^n \right| \leq$$

$$\leq \left| 2 \int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,R)} f\psi\, \langle \nabla\psi, A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)\rangle \, d\mathcal{H}^n \right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, M\,.$$

Тем самым, пользуясь (3.7.39), приходим к неравенству

$$\nu \int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,R)} \psi^2 k(x) |A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|^2 \, d\mathcal{H}^n \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,R)} f\,\psi|\nabla\psi|\,|A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|\,d\mathcal{H}^n + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,M\,.$$

Так как

$$|a\,b| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2\,, \quad p>1\,,$$

то для любого $s>0$ выполнено

$$f\,\psi|\nabla\psi|\,|A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)| \leq \frac{1}{2\,s^2}f^2k^{-1}(x)\,|\nabla\psi|^2 +$$

$$+s^2\frac{1}{2}\psi^2\,k(x)\,|A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|^2\,.$$

Выберем $s>0$ так, чтобы

$$\nu > \ s^2\,. \tag{3.8.44}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,R)} \psi^2k(x)\,|A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|^2\,d\mathcal{H}^n \leq C_1(s)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) +$$

$$+C_2(s)\int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,R)} k^{-1}(x)\,|\nabla\psi|^2\,d\mathcal{H}^n\,,$$

где

$$C_1(s) = M\,/\left(\nu - s^2\right)\,, \quad C_2(s) = \frac{M^2}{s^2}\,/\left(\nu - s^2\right)\,.$$

Учитывая теперь, что $\psi(x)\equiv 1$ при $x\in B(0,r)$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,r)} k(x)\,|A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|^2\,d\mathcal{H}^n \leq C_1(s)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) +$$

$$+C_2(s)\int\limits_{\mathcal{O}\cap\{r<|x|<R\}} k^{-1}(x)\,|\nabla\psi|^2\,d\mathcal{H}^n\,.$$

Обозначим через

$$\mathrm{cap}_{k^{-1}}\,(P,Q;D) = \inf_{\psi} \int\limits_{D} k^{-1}(x)|\nabla\psi|^2\, d\mathcal{H}^n, \quad \psi|_P \equiv 0, \quad \psi|_Q \equiv 1\,,$$

взвешенную емкость конденсатора $(P,Q;D)$. Тогда для любого $s > 0$, удовлетворяющего (3.8.44), выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,r)} k(x)\,|A(x,\nabla h_1) \;-\; A(x,\nabla h_2)|^2\, d\mathcal{H}^n \le$$

$$\le C_1(s)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + C_2(s)\,\mathrm{cap}_{k^{-1}}(\mathcal{O}_r,\mathcal{O}_R;D)\,, \tag{3.8.45}$$

где $\mathcal{O}_t = \{|x| < t\} \cap \mathcal{O}$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является k^{-1}-*узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{cap}_{k^{-1}}\,(D_r, D\setminus D_R) = 0\,.$$

Имеет место следующая форма принципа максимума для разности почти решений.

Теорема 3. *Пусть h_1, h_2 – почти решения в области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения* (3.1.3) *с ограничениями* (i), (ii) *и* (iv). *Предположим, что h_1, h_2 удовлетворяют условию*

$$\limsup_{x\to x_0}(h_1(x) - h_2(x)) \le 0\,, \quad x \in D,\, x_0 \in \partial D\,,$$

и имеют уклонения $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ соответственно.

Тогда либо $h_1 \le h_2$ всюду в D, либо множество $\mathcal{O} = \{x \in D : h_1(x) > h_2(x)\}$ не пусто и имеет место (3.8.45). *В частности, если область D ограничена или является k^{-1}-узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено*

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\,|A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|^2\, d\mathcal{H}^n \le \frac{M}{\nu}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,. \tag{3.8.46}$$

Для разности решений уравнения газовой динамики близкое утверждение получено в [KM05], для почти решений A-гармонических уравнений — в [Mikl07, раздел 7.1.2].

3.9 Замечания

Положим

$$\lambda_k(\mathcal{O}) = \inf_{u_1,u_2} \frac{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |A(x,\nabla u_1) - A(x,\nabla u_2)|^2\, d\mathcal{H}^n}{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |u_1 - u_2|^2\, d\mathcal{H}^n} \tag{3.9.47}$$

и

$$u_1,\, u_2 \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}})\,, \quad (u_1 - u_2)|_{\partial\mathcal{O}} = 0\,.$$

В описанных обозначениях имеем

$$\lambda_k(\mathcal{O}) \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |h_1(x) - h_2(x)|^2\, d\mathcal{H}^n \le \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |A(x,\nabla h_1) - A(x,\nabla h_2)|^2\, d\mathcal{H}^n$$

и неравенство (3.8.45) принимает вид

$$\lambda_k(\mathcal{O}) \int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,r)} k(x)\, |h_1 - h_2|^2\, d\mathcal{H}^n \le$$
$$\le C_1(s)\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_2(s)\,\mathrm{cap}_{k^{-1}}(\mathcal{O}_r, \mathcal{O}_R; D)\,.$$

Если же область D ограничена либо является k^{-1}-узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, то

$$\int\limits_{\mathcal{O}\cap B(0,r)} k(x)\, |h_1 - h_2|^2\, d\mathcal{H}^n \le \frac{M}{\nu}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Big/ \lambda_k(\mathcal{O})\,.$$

В случае, когда h_1, h_2 суть решения, т.е. уклонения ε_1, $\varepsilon_2 = 0$, мы имеем
$$\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)|h_1(x) - h_2(x)|^2 \, d\mathcal{H}^n = 0\,.$$
Отсюда, если $k(x) > 0$ почти всюду, то $h_1(x) \equiv h_2(x)$ и мы приходим к стандартной форме принципа максимума. Другими словами, свойство (3.8.46) для почти решений представляет собой некоторую специальную форму принципа максимума.

Эффективные оценки снизу для величины (3.9.47) представляют собой весьма нетривиальную задачу.

Список литературы

[HKM93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, Oxford etc., 1993, 363 pp.

[Mikl06a] В.М. Миклюков, A-решения с особенностями как почти решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, стр. 31—50.

[Fed69] Г. Федерер, Геометрическая теория меры, М: изд-во "Наука", 1969, 760 стр.

[Mikl06b] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006, 284 стр.

[MV00] V.M. Miklyukov, M.K. Vuorinen, A generalized maximum principle for the differences of $p-$harmonic functions on Riemannian manifolds, Труды по анализу и геометрии, Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000, 401–413.

[MRV07] V.M. Miklyukov, A. Rasila, and M.K. Vuorinen, Three spheres theorem for p-harmonic functions, Houston Journal of Mathematics, v. 33, n. 4, 2007, 1215–1230.

[By05] J. Byström, Sharp constants foe some inequalities connected to the p-Laplace operator, Journal Inequalities in Rure and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2005, 1-8.

[Mikl07] В.М. Миклюков, Геометрический анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007, 532 стр.

[Mik79] В.М. Миклюков, Об одном новом подходе к теории Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности, Матем. сб., 1979, т. 108(150), 268-289; см. также сборн. статей "Научные школы Волгоградского государственного ун-та. Геометрический анализ и его приложения", Волгоград, Изд-во ВолГУ, 1999, 22-51.

[Hw88] J.F. Hwang, Comparison principles and theorems for prescribed mean curvature equation in unbounded domains, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1988, v. 15, 341-355.

[Hw95] J.F. Hwang, A uniqueness theorem for the minimal surface equation, Pacific J. Math., 1996, v. 176, 357-364.

[CK91] P. Collin, R. Krust, Le probléme de Dirichlet pour l'equation des surfaces minimales sur des domaines non bornés, Bull. Soc. Math. France, 1991, v. 119, 443-458.

[PRS02] S. Pigola, M. Rigoli and A.G. Setti, Some remarks on the prescribed mean curvature equation on complete manifolds, Pacific J. Math., 2002, v. 206, no. 1, 195-217.

[Bers61] Л. Берс, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, Н.:ИЛ, 1961, 208 с.

[LS73] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, М.: Наука, 1973, 416 с.

[KKM] V.A. Klyachin, A.V. Kochetov, V.M. Miklyukov, Some elementary inequalities in gas dynamics equation, Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint **402**, 2004, 26pp.; Journal of Inequalities and Applications, 2006, Article ID 21693, 29 pp.

[KM05] А.В. Кочетов, В.М. Миклюков, "Слабая" теорема типа Фрагмена – Линделефа для разности решений уравнения газовой динамики, Сибирск. журн. индустриальной математики, т. IX, n. 3, 2006, с. 90-101.

V.M. Miklyukov, **Maximum principle for difference of almost solutions of elliptic equations.**

Abstract. An analog of the maximum principle is proved for differences of almost solutions of p-harmonic equations, the minimal surface equation and the gas dynamics equation.

4

К неравенству Гарнака для почти решений эллиптических уравнений

В.М. Миклюков

В сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы". Вып. 3. Волгоград: изд-во ВолГУ. 2007. с. 30-43ж Изв. РАН, Серия математическая, Т. 73, n. 5, 2009.

Устанавливается аналог неравенства Гарнака для почти решений A-гармонических уравнений.

4.1 Уравнения

Условимся в обозначениях. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $n > 1$, со стандартным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и модулем $|\cdot| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x, \xi)$ определено и непрерывно;

(ii) отображение $x \in D \to A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$A(x, \lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,A(x,\xi)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1\,, \tag{4.1.1}$$

$$\nu_1\,|\xi|^p \le \langle \xi, A(x,\xi)\rangle\,, \tag{4.1.2}$$

$$|A(x,\xi)| \le \nu_2\,|\xi|^{p-1}\,, \tag{4.1.3}$$

где ν_1, $\nu_2 > 0$ и $p \ge 1$ – некоторые постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0\,. \tag{4.1.4}$$

Решения h уравнения (4.1.4) называются A-*гармоническими* функциями, а само уравнение – A-гармоническим [1, глава 6].

Простейшим уравнением описанного вида является уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) = 0\,, \quad p > 1\,.$$

4.2 Почти решения

Говорят, что функция $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет *условию Липшица* на множестве U, если существует постоянная $0 \le C < \infty$ такая, что для произвольной пары точек x', $x'' \in U$ выполнено

$$|h(x'') - h(x')| \le C\,|x'' - x'|\,.$$

Функция $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ называется *локально липшицевой*, если она удовлетворяет условию Липшица на всяком компактном подмножестве $F \subset U$.

Символом $C(E)$ обозначается класс функций, непрерывных на множестве E, символом $C^k\,(D)$, $k = 1, 2, \ldots$, – множество функций, имеющих производные порядка k в области D.

Функция h принадлежит классу $W^{1,p}(D)$, $p \ge 1$, если она имеет обобщенные в смысле С.Л. Соболева частные производные

$$\partial h/\partial x_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

суммируемые по D со степенью p.

Функция h принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$, если она принадлежит классу $W^{1,p}(D')$ для всякой подобласти $D' \Subset D$. Последнее означает, что замыкание D' компактно и содержится в D.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, ∂D – ее граница и пусть $A(x,\xi) : D \times \mathbb{R}^n$ – вектор-функция со свойствами $(i) - (iii)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что непрерывная функция* h *класса* $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$ *является почти решением уравнения* (4.1.4)*, если для всякой функции*

$$\varphi(x) \in W^{1,p}(D) \cap C(\overline{D})\,, \quad \varphi|_{\partial D} = 0\,, \quad 0 \le \varphi(x) \le 1\,, \tag{4.2.5}$$

выполнено:

$$\left|\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h)\rangle \; d\mathcal{H}^n\right| \le \varepsilon \tag{4.2.6}$$

(здесь $d\mathcal{H}^n$ – элемент n-мерной меры Лебега).

Величина $\varepsilon > 0$ называется *уклонением* почти решения h [2].

Если функция h определена в неограниченной области D, то h есть почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$, если она является таковым в каждой ограниченной подобласти $D' \subset D$. Ниже, если не оговорено противное, предполагается, что область определения почти решения ограничена.

Носителем $\operatorname{supp} h$ функции $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ называется множество

$$\overline{\{x \in D : h(x) \neq 0\}}.$$

Функция h *финитна* в D, если ее носитель компактен и содержится в D.

Предложение. *При определении почти решения достаточно ограничиться финитными в* D *функциями* φ со свойствами (4.2.5) и (4.2.6).

Доказательство. Действительно, пусть $h : D \to \mathbb{R}^1$ – почти решение уравнения (4.1.4) в смысле определения 1 в некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$. Для произвольной неотрицательной функции φ со свойствами (4.2.5) и произвольного $\delta > 0$ полагаем

$$D_\delta = \{x \in D : 0 \le \varphi(x) \le \delta\}$$

и

$$\varphi_\delta = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \in D_\delta\,, \\ \varphi(x) - \delta \quad \text{при} \quad x \in D \setminus D_\delta\,. \end{cases}$$

Функции φ_δ финитны в D и обладают свойствами (4.2.5). Тем самым,

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi_\delta, A(x, \nabla h)\rangle \; d\mathcal{H}^n \right| \le \varepsilon\,.$$

Замечая, что

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_D \langle \nabla\varphi_\delta, A(x, \nabla h)\rangle \; d\mathcal{H}^n = \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle \; d\mathcal{H}^n\,,$$

легко заключаем нужное. □

Отдельные свойства почти решений, а также их связи с почти квазиконформными отображениями в смысле Кэллендера [3] см. в [4, §8.7]. Ниже для почти решений A-гармонических уравнений предлагаются некоторые версии неравенства типа неравенства Гарнака. Для решений уравнений эллиптического типа различные варианты неравенства Гарнака см., например, в [5, §3.5 и др.], [1, теорема 6.6], [4, теорема 3.2.3].

4.3 Подготовительное неравенство

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и пусть $h : D \to \mathbb{R}^1$ – почти решение уравнения (4.1.4) с уклонением $\varepsilon > 0$. Предположим, что $h > 0$ в D. Введем обозначение $u = \ln h$.

В силу (4.2.6), для произвольной функции φ со свойствами (4.2.5) выполнено

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla e^u)\rangle \, d\mathcal{H}^n \right| \le \varepsilon\,.$$

Для функций φ со свойствами:

$$\varphi(x) \in W^{1,p}(D) \cap C(\overline{D})\,, \quad \varphi|_{\partial D} = 0\,, \quad 0 \le \varphi(x) < \infty\,, \tag{4.3.7}$$

имеем

$$\left|\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla e^u)\rangle\, d\mathcal{H}^n\right| \le \varepsilon \max_{x\in D}\varphi(x)\,.$$

Пользуясь соотношением (4.1.1), находим

$$A(x,\nabla e^u) = e^{(p-1)\,u}\, A(x,\nabla u)$$

и далее,

$$\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla e^u)\rangle\, d\mathcal{H}^n = \int\limits_D \langle e^{(p-1)u}\,\nabla\varphi, A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n =$$

$$= \int\limits_D \langle \nabla\left(\varphi\, e^{(p-1)u}\right), A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n - (p-1)\int\limits_D \varphi\, e^{(p-1)u}\langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n =$$

$$= \int\limits_D \langle \nabla\psi, A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n - (p-1)\int\limits_D \psi\langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n\,,$$

где $\psi = \varphi\, e^{(p-1)\,u}$.

Отсюда,

$$(p-1)\int\limits_D \psi\langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n \le \varepsilon \max_{x\in D}\varphi(x) + \left|\int\limits_D \langle \nabla\psi, A(x,\nabla u)\rangle\, d\mathcal{H}^n\right|.$$

На основании структурных ограничений (4.1.2) и (4.1.3), получаем

$$(p-1)\nu_1\int\limits_D \psi\,|\nabla u|^p\, d\mathcal{H}^n \le \varepsilon \max_{x\in D}\frac{\psi(x)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + \nu_2\int\limits_D |\nabla\psi|\,|\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^n\,.$$

Удобно положить $\psi = \eta^p$. В этом случае предыдущее неравенство переписывается в виде

$$(p-1)\nu_1\int\limits_D \eta^p\,|\nabla u|^p\, d\mathcal{H}^n \le \varepsilon \max_{x\in D}\frac{\eta^p(x)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + p\nu_2\int\limits_D \eta^{p-1}|\nabla\eta|\,|\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^n\,.$$

Пользуясь неравенством

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}, \quad a, b \ge 0, \quad p > 1,$$

для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\eta^{p-1}|\nabla\eta|\,|\nabla u|^{p-1} \le \frac{\delta^p}{p}|\nabla\eta|^p + \frac{p-1}{p\,\delta^{\frac{p}{p-1}}}\eta^p\,|\nabla u|^p.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} < \delta^{\frac{p}{p-1}}. \tag{4.3.8}$$

Тогда

$$\int\limits_D \eta^p\,|\nabla u|^p\,d\mathcal{H}^n \le C_1(\delta)\,\varepsilon\,\max_{x\in D}\frac{\eta^p(x)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + C_2(\delta)\int\limits_D |\nabla\eta|^p\,d\mathcal{H}^n, \tag{4.3.9}$$

где

$$C_1(\delta) = \frac{1}{(p-1)\big(\nu_1 - \nu_2\delta^{-p/(p-1)}\big)}, \quad C_2(\delta) = \frac{\nu_2\delta^p}{(p-1)\big(\nu_1 - \nu_2\delta^{-p/(p-1)}\big)}.$$

Пусть $U \Subset D$ – подобласть. Выберем $\eta = 1$ на U. Учитывая, что $\eta \ge 0$ в D, на основании неравенства (4.3.9) приходим к утверждению:

Лемма 1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть h – положительное почти решение в D уравнения (4.1.4) с уклонением $\varepsilon > 0$. Тогда для всякой подобласти $U \Subset D$, произвольного $\delta > 0$ со свойством (4.3.8) и произвольной неотрицательной в D функции η со свойствами:*

$$\eta(x) \in W^{1,p}(D) \cap C(\overline{D}), \quad \eta|_{\partial D} = 0, \quad \eta|_U = 1,$$

выполнено

$$\int\limits_U |\nabla u|^p\,d\mathcal{H}^n \le C_1(\delta)\,\varepsilon\,\max_{x\in D}\frac{\eta^p(x)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + C_2(\delta)\int\limits_{D\setminus\overline{U}} |\nabla\eta|^p\,d\mathcal{H}^n. \tag{4.3.10}$$

4.4 Емкость

Оценка (4.3.10) справедлива для произвольной постоянной $\delta > 0$, удовлетворяющей (4.3.8). Данная оценка является ключевой в построениях.

Обозначим через $\mathcal{E}(\kappa)$ множество всех функций $\eta(x)$, допустимых в (4.3.10) и таких, что

$$\sup_{x\in D} \frac{\eta^p(x)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} \le \kappa < \infty \,. \tag{4.4.11}$$

Определение 2. *Величина*

$$\mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D) = \inf_{\eta\in\mathcal{E}(\kappa)} \int\limits_{D\setminus\overline{U}} |\nabla\eta|^p \, d\mathcal{H}^n \tag{4.4.12}$$

называется $\mathcal{E}(\kappa)$*-емкостью конденсатора* $(U, \partial D)$.

Если множество $\mathcal{E}(\kappa)$ пусто, то мы полагаем $\mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D) = \infty$.

Следует отметить, что в общем случае, в силу специфики условия (4.4.11), класс функций $\mathcal{E}(\kappa)$ и, следовательно, величина $\mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)$ зависят от p и h.

В случае, когда точная нижняя грань в (4.4.12) берется по всем непрерывным в области D функциям $\eta \in W^{1,p}(D)$, $\eta|_U = 1$, $\eta|_{\partial D} = 0$, мы имеем стандартную p-емкость $\mathrm{cap}_p\,(U, \partial D)$ конденсатора, образуемого парой областей U, D, $U \Subset D$, т.е.

$$\mathrm{cap}_p\,(U, \partial D) = \inf_{\eta} \int\limits_{D\setminus\overline{U}} |\nabla\eta|^p \, d\mathcal{H}^n \,. \tag{4.4.13}$$

С использованием введенных величин лемма 1 принимает следующий вид:

Лемма 2. *Если h – положительное почти решение в области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения (4.1.4) с уклонением $\varepsilon > 0$, то для всякой подобласти $U \Subset D$ выполнено*

$$\int\limits_U |\nabla u|^p \, d\mathcal{H}^n \le \inf_{\delta,\kappa} \left[C_1(\delta)\,\kappa\,\varepsilon + C_2(\delta)\,\mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)\right] \,, \tag{4.4.14}$$

где точная нижняя грань берется по всем $\delta > 0$, удовлетворяющим (4.3.8), *и всем* κ, $0 \le \kappa < \infty$.

В случае решений уравнения (4.1.4) величина $\varepsilon = 0$ и оценка (4.4.14) совпадает с оценкой (5.5) из [6].

4.5 Принцип 'длины и площади'

Нам потребуется специальная форма известного принципа 'длины и площади' [7]. Пусть $V \Subset U$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть $g : \overline{U} \to \mathbb{R}^1$ – липшицева функция, подчиненная условиям:

(a) $g|_{\partial U} = 0$ и $g|_V = 1$;

(b) для всякой подобласти $F \Subset (U \setminus \overline{V})$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess}\inf_F |\nabla g(x)| \le \operatorname{ess}\sup_F |\nabla g(x)| < \infty\,.$$

Для произвольного $t \in (0,1)$ символом Σ_t будем обозначать компоненту связности множества $\{x \in D : g(x) = t\}$, разделяющую границы ∂U и ∂V, символом B_t – открытое подмножество D с границей $\partial B_t = \Sigma_t$. Так как функция g липшицева, то почти все ее поверхности уровня $\{y : g(x) = t\}$ являются счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемыми [8, теорема **3.2.15**] и, в частности, на них определена $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$.

Зафиксируем гиперповерхность Σ_t описанного вида. Для произвольной пары точек $a, b \in \Sigma_t$ пусть $\Gamma = \Gamma(a,b)$ означает семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \Sigma_t$, соединяющих точки a и b. Определим величину

$$\operatorname{mod}_p(g,\Gamma) = \inf \frac{\displaystyle\int\limits_{\Sigma_t} \frac{\rho^p}{|\nabla g|}\, d\mathcal{H}^{n-1}}{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma} \displaystyle\int\limits_{\gamma} \rho\, d\mathcal{H}^1\right)^p}\,, \tag{4.5.15}$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным борелевским функциям $\rho : \Sigma_t \to \mathbb{R}^1$. Если $\Gamma(a,b) = \emptyset$, то мы полагаем $\operatorname{mod}_p(g,\Gamma) = \infty$.

Введем обозначение

$$\mu_p(t) = \inf_{a,b\in\Sigma_t} \operatorname{mod}_p(g,\Gamma)\,. \tag{4.5.16}$$

Функция $\mu_p(t)$ измерима на $(0,1)$. Некоторые конкретные примеры этой функции можно найти в [6, стр. 207].

Имеет место

Лемма 3. *Если функция $h: U \to \mathbb{R}^1$ принадлежит классу $W^{1,p}(U)$, $p > n-1$, и $\operatorname{osc}\{h, \Sigma_t\}$ есть колебание h на Σ_t, то*

$$\int\limits_0^1 \operatorname{osc}^p\{h,\Sigma_t\}\,\mu_p(t)\,dt \le \int\limits_{U\setminus\overline{V}} |\nabla h|^p\, d\mathcal{H}^n\,. \tag{4.5.17}$$

Доказательство см. в [6, лемма 5.1].

4.6 Основная теорема

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть U, V – ее подобласти, $V \Subset U \Subset D$. Положим

$$\theta_p(V,U,D) = \frac{\left(\inf\limits_{\delta,\kappa}\left[C_1(\delta)\,\kappa\,\varepsilon + C_2(\delta)\operatorname{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U,\partial D)\right]\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^1 \mu_p(t)\,dt\right)^{1/p}}\,. \tag{4.6.18}$$

Определение 3. *Пусть $\mathcal{O}$ – область в $\mathbb{R}^n$. Величина*

$$\lambda_p(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int\limits_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n}{\int\limits_{\mathcal{O}} u^p d\mathcal{H}^n}\,, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{4.6.19}$$

называется основной частотой порядка $p \geq 1$ *открытого множества* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Следующее утверждение является центральным в работе.

Теорема 1. *Пусть* D *– область в* $\mathbb{R}^n$ *и* U, V *– ее подобласти,* $V \Subset U \Subset D$. *Если* h *– положительное почти решение уравнения* (4.1.4), $p > n-1$, *в* D, *то*

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\} \leq \tag{4.6.20}$$
$$\leq \exp\{\,\theta_p(V,U,D)\}\,\sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\}\,,$$

где точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всевозможным непустым открытым подмножествам $\mathcal{O}_C \subset D$, $D \setminus \mathcal{O}_C \neq \emptyset$, *таким, что* $h|_{\partial \mathcal{O}_C} = C$, $C = \mathrm{const}$.

Доказательство. Объединяя оценки (4.4.14) и (4.5.17), находим

$$\int\limits_0^1 \mathrm{osc}^p \{\ln h, \Sigma_t\}\, \mu_p(t)\, dt \leq \inf_{\delta,\kappa} \left[C_1(\delta)\, \kappa\, \varepsilon + C_2(\delta)\, \mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)\right]\,,$$

или

$$\left(\inf_{t \in (0,1)} \mathrm{osc}\{\ln h, \Sigma_t\}\right)^p \int\limits_0^1 \mu_p(t)\, dt \leq \inf_{\delta,\kappa} \left[C_1(\delta)\, \kappa\, \varepsilon + C_2(\delta)\, \mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)\right]\,.$$

Таким образом, для всякого достаточно малого $s > 0$ и подходящего $t_0 > 0$:

$$(\mathrm{osc}\,\{\ln h, \Sigma_{t_0}\} - s)^p \int\limits_0^1 \mu_p(t)\, dt \leq \inf_{\delta,\kappa} \left[C_1(\delta)\, \kappa\, \varepsilon + C_2(\delta)\, \mathrm{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)\right]\,.$$

Отсюда получаем

$$\max\{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - \min\{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - s =$$
$$= \mathrm{osc}\,\{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - s\, \leq \theta_p(V,U,D)$$

и

$$\max\{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - \min\{\ln(e^s h(x)) : x \in \Sigma_{t_0}\} \leq \theta_p(V,U,D)\,.$$

Потенцируя, находим

$$\max\{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} \le \exp\{\theta_p(V,U,D)\} \min\{(e^s h(x)) : x \in \Sigma_{t_0}\}.$$

Поскольку $s > 0$ есть произвольное, сколь угодно малое число, то

$$\max\{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} \le \exp\{\theta_p(V,U,D)\}\min\{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\}.$$

Воспользуемся утверждением (следствие 7.1.1 [4]):

Лемма 4. *Пусть f – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$ в области D уравнения* (4.1.4) *с ограничениями* (4.1.1) – (4.1.3), *удовлетворяющее на границе области предположению $f|_{\partial D} \le C$. Тогда либо $f(x) \le C$ всюду в D, либо множество $\mathcal{O}_C = \{x \in D : f(x) > C\}$ не пусто и*

$$\int\limits_{\mathcal{O}_C} |f(x) - C|^p \, d\mathcal{H}^n \le \frac{2\widetilde{M}\,\varepsilon}{\nu_1\,\lambda_p(D)}, \quad \widetilde{M} = \sup_{x\in D} |f(x) - C|.$$

Так как h – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$, то $-h$ – также почти решение. При этом, если множество $\mathcal{O}_C$ не пусто, то

$$\widetilde{M} = \max_{x\in D} |h(x) - C| \le 2 \max_{x\in D} h(x) = 2M.$$

На основании леммы 4 имеем

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\} \le \inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in B_{t_0} \setminus \mathcal{O}_C\} \le$$

$$\le \max\{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\}$$

и

$$\min\{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} \le \sup_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in B_{t_0} \setminus \mathcal{O}_C\} \le$$

$$\le \sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\},$$

что непосредственно влечет (4.6.20). $\square$

4.7 Монотонные функции

Рассмотрим частный случай. Напомним следующее понятие:

Определение 4. *Функция $h : D \to \mathbb{R}^1$ называется монотонной, если для всякой подобласти $D' \subset D$ выполнено*

$$\operatorname{osc}(h, D') \leq \operatorname{osc}(h, \partial D')\,.$$

Так как для монотонной функции открытые множества $\mathcal{O}_C$ описанного выше вида отсутствуют, то из теоремы 1 вытекает:

Следствие. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и U, V – ее подобласти, $V \Subset U \Subset D$. Если h – положительное, монотонное почти решение уравнения* (4.1.4)*, $p > n-1$, в D, то*

$$\max\{h(x) : x \in V\} \leq \exp\{\,\theta_p(V, U, D)\}\min\{h(x) : x \in V\}\,. \tag{4.7.21}$$

4.8 Почти решения в шаре

Если функция η является экстремальной в вариационной задаче (4.4.13), то из соотношения (4.4.14) следует

$$\int\limits_U |\nabla u|^p\, d\mathcal{H}^n \leq \inf_\delta \left[C_1(\delta)\,\varepsilon \sup_{x\in D}\frac{\eta^p(x)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + C_2(\delta)\operatorname{cap}_p(U, \partial D)\right]. \tag{4.8.22}$$

Пусть $D = B(0, r_3)$ – шар радиуса $r_3 > 0$ с центром в начале координат $x = 0$ и пусть $U = B(0, r_2)$, $V = B(0, r_1)$, где $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$. Несложно проверяется, что экстремальная в вариационной задаче (4.4.13) для конденсатора $(U, \partial D)$ функция имеет вид

$$\eta_0(|x|) = \int\limits_{|x|}^{r_3}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}}\left(\int\limits_{r_2}^{r_3}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}}\right)^{-1}.$$

Здесь имеем

$$\operatorname{cap}_p(U, \partial D) = \int\limits_{D\setminus U}|\nabla\eta_0|^p\, d\mathcal{H}^n\,, \quad p > 1\,,$$

и оценка (4.8.22) принимает вид

$$\int\limits_U |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq$$

$$\leq \inf_\delta \left[C_1(\delta)\,\varepsilon \sup_{x\in D} \frac{\eta_0^p(|x|)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + C_2(\delta)\,\omega_{n-1} \left(\int\limits_{r_2}^{r_3} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}} \right)^{1-p} \right], \qquad (4.8.23)$$

где ω_{n-1} – $(n-1)$-мерная площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{r_2 - |x|}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \leq |x| \leq r_2\,.$$

Мы имеем $|\nabla g(x)| \equiv 1$. Тем самым, g удовлетворяет условиям (a), (b) раздела 5. Величина (4.5.15) в данном случае имеет вид

$$\operatorname{mod}_p(g,\Gamma) = \inf_\rho \frac{\int\limits_{\Sigma_t} \rho^p \, d\mathcal{H}^{n-1}}{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_\gamma \rho \, d\mathcal{H}^1 \right)^p}\,.$$

Мы имеем

$$d\mathcal{H}^{n-1}\big|_{\Sigma_t} = \omega_{n-1}\,[r_2 - t(r_2 - r_1)]^{n-1}\, d\omega_{n-1}\,,$$

и

$$d\mathcal{H}^1\big|_{\Sigma_t} = [r_2 - t(r_2 - r_1)]\; ds_{n-1}\,,$$

где $d\omega_{n-1}$ и ds_{n-1} – элемент площади и элемент длины на $(n-1)$-мерной сфере в $\mathbb{R}^n$ единичного радиуса. Тем самым, для функции, определяемой равенством (4.5.16), и произвольного $t \in (0,1)$ можем записать

$$\mu_p(t) = \mu_{p,n-1}\; [r_2 - t(r_2 - r_1)]^{n-p-1}\,,$$

где $\mu_{p,n-1} = \operatorname{mod}_p(g,\Gamma_0)$ – стандартный p-мерный модуль семейства всевозможных спрямляемых дуг Γ_0 на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, соединяющих "северный и южный полюсы" сферы. Отсюда получаем

$$\int\limits_0^1 \mu_p(t)\,dt = \frac{\mu_{p,n-1}}{r_2-r_1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \tau^{n-p-1} d\tau\,. \tag{4.8.24}$$

Здесь $\mu_{p,n-1} > 0$ тогда и только тогда, когда $p > n-1$, что непосредственно следует из вида элемента площади $d\mathcal{H}^{n-1}$ на единичной сфере и интегрального неравенства Гельдера.

Теорема 2. *Предположим, что области $V \Subset U \Subset D$ суть концентрические шары в $\mathbb{R}^n$ радиусов $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$ соответственно. Тогда, если h – положительное почти решение уравнения* (4.1.4), *$p > n-1$, с уклонением $\varepsilon > 0$ в D, то имеет место утверждение теоремы 1 с постоянной $\theta_p(V,U,D)$ в* (4.6.20) *равной*

$$\frac{\left(\inf\limits_{\delta}\left[C_1(\delta)\,\varepsilon\,\sup\limits_{x\in D}\frac{\eta_0^p(|x|)}{\big(h(x)\big)^{p-1}} + C_2(\delta)\,\omega_{n-1}\left(\int\limits_{r_2}^{r_3}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}}\right)^{1-p}\right]\right)^{1/p}}{\left(\frac{\mu_{p,n-1}}{r_2-r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2} t^{n-p-1}\,dt\right)^{1/p}}\,. \tag{4.8.25}$$

Для **доказательства** достаточно воспользоваться оценками (4.8.23) и (4.8.24). Заметим при этом, что точная нижняя грань в (4.8.25) берется по всем $\delta > 0$, удовлетворяющим неравенству (4.3.8). $\square$

Список литературы

[1] Heinonen J., Kilpeläinen T., and Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Clarendon Press, Oxford etc., 1993. 363 p.

[2] Миклюков В.М. A-решения с особенностями как почти решения// Матем. сб. 2006. Т. 197, N. 11. С. 31—50.

[3] E.D. Callender, Hölder-continuity of N-dimensional quasiconformal mappings// Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 499-515.

[4] Миклюков В.М. Геометрический анализ. Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007. 532 с.

[5] Гилбарг D., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производным второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

[6] Martio O., Miklyukov V.M., and Vuorinen M. Harnack's inequality for $p-$harmonic functions on Riemannian manifolds for different exhaustion// Комплексный анализ в современной математике. К 80-летию со дня рождения Бориса Владимировича Шабата, стр. 201-230, ред. Е.М. Чирка, М.: Фазис, 2001.

[7] Суворов Г.Д. Обобщенный "принцип длины и площади"в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985. 278 с.

[8] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М: Наука, 1969. 760 с.

V.M. Miklyukov, **On Harnack inequality for almost solutions of elliptic equations.**

Abstract. An analog of the Harnack inequality is proved for almost solutions of A-harmonic equations.

5

Решения параболических уравнений как почти решения эллиптических

В.М. Миклюков

Напр. в сб. Математический и прикладной анализ. Тюменск. гос. ун-т. 2009.

Памяти друга -
Виктора Ивановича Кругликова

Устанавливается, что в определенных условиях решения уравнений параболического типа могут рассматриваться как почти решения эллиптических. В качестве приложения указывается некоторая специальная форма принципа максимума для решений параболических уравнений.

5.1 Классы уравнений

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}^1$ – измеримая по Лебегу функция такая, что для всякой подобласти $D' \Subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess}\inf_{D'} k(x) \le \operatorname{ess}\sup_{D'} k(x) < \infty\ . \tag{5.1.1}$$

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно;

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$A(x,\lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,A(x,\xi)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1\,, \tag{5.1.2}$$

$$\mu_1\,k(x)\,|\xi|^p \leq \langle \xi, A(x,\xi)\rangle\,, \tag{5.1.3}$$

$$|A(x,\xi)| \leq \mu_2\,k(x)\,|\xi|^{p-1}\,, \tag{5.1.4}$$

где μ_1, $\mu_2 > 0$ и $p \geq 1$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\mu = \mu_2/\mu_1$. Ясно, что всегда $\mu \geq 1$.

Пусть $-\infty \leq \tau_0 < \tau_1 \leq +\infty$ – фиксированные числа. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x,\nabla h) = B(t,h,h'_t)\,, \tag{5.1.5}$$

где

$$h = h(x,t) : D \times (\tau_0,\tau_1) \to \mathbb{R}^1\,,$$

$$\nabla h = (h'_{x_1},\ldots,h'_{x_n}) \ - \ \text{формальный градиент}\,,$$

$$B(t,h,h'_t) = b_0(t)\,|h|^{p-2}\,h + b_1(t)\,|h|^{p-2}\,h\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

и

$$b_0(t),\ b_1(t) : (\tau_0,\tau_1) \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

– локально липшицевы на (τ_0,τ_1) функции.

В случае b_0, $b_1 \equiv 0$ простейшим уравнением описанного вида является уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) = 0\,, \quad p > 1. \tag{5.1.6}$$

Решения h уравнения (5.1.6) называются *p-гармоническими* функциями, а само уравнение – p-гармоническим [HKM93, глава 6].

Рассматриваемый в работе класс уравнений включает в себя при b_0, $b_1 \equiv 0$ уравнение минимальной поверхности

$$\operatorname{div}\frac{\nabla h(x)}{\sqrt{1+|\nabla h(x)|^2}} = 0\,.$$

(см. [Mikl06a, теорема **6.1.2**]).

При определенных γ описанному классу принадлежит также и уравнение газовой динамики

$$\mathrm{div}\ (\sigma(|\nabla h(x)|)\,\nabla h(x)) = 0\,,$$

где

$$\sigma(t) = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} t^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

и γ — постоянная, $-\infty < \gamma < +\infty$, характеризующая поток субстанции [Mikl06a, раздел **6.1.4**].

В случае $p = 2$, $b_0 \equiv 0$, $b_1 \equiv 1$ и $A(x,\xi) = \xi$ имеем стандартное уравнение теплопроводности в $\mathbb{R}^n$.

5.2 Решения и почти решения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $(\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1$.

Определение 1. *Пусть $h : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$ – непрерывная функция, принадлежащая классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ при каждом $t \in (\tau_0, \tau_1)$ и имеющая производную $h'_t(x,t)$, удовлетворяющую условию Липшица локально на (τ_0, τ_1) при каждом $x \in D$. Функция h является обобщенным решением уравнения* (5.1.5) *, если для всякой непрерывной функции $\phi(x) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ с компактным носителем $\mathrm{supp}\,\phi(x) \subset D$ при каждом $t \in (\tau_0, \tau_1)$ выполнено*

$$\int\limits_D \langle \nabla\phi, A(x, \nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^n = -\int\limits_D \phi\, B(t, h, h'_t)\, d\mathcal{H}^n\,. \tag{5.2.7}$$

Простые соображения, опирающиеся на обобщенную формулу Остроградского - Гаусса для функций с локально липшицевыми производными (см. [Mikl06a, теорема 2.6.2]) показывают, что выполнение (5.2.7) с указанным произволом на функцию ϕ влечет выполнение соотношения (5.1.5).

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $A(x,\xi) : D \times \mathbb{R}^n$ – произвольная вектор-функция со свойствами $(i) - (iii)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Определение 2. *Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является почти-решением уравнения*

$$\mathrm{div}\, A(x, \nabla h) = 0\,, \tag{5.2.8}$$

если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^{1,p}(D)\,, \quad 0 \le |\varphi(x)| \le 1\,, \tag{5.2.9}$$

с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ *выполнено:*

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h)\rangle \; d\mathcal{H}^n \right| < \varepsilon\,. \tag{5.2.10}$$

Величина $\varepsilon > 0$ называется *уклонением* почти-решения h [Mikl06b].

5.3 Основная теорема

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, пусть $(\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1$ и пусть

$$h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$$

— обобщенное решение уравнения (5.1.5), подчиненного условиям (5.1.1) - (5.1.4).

Положим $\widetilde{D} = D \times (\tau_0, \tau_1)$. Пусть $\tilde{x} = (x,t) \in \widetilde{D}$. В каждой точке $\tilde{x} \in \widetilde{D}$, где определены формальный градиент $\nabla h(x)$ и производная $\partial h/\partial t$ полагаем

$$\widetilde{\nabla} h(\tilde{x}) = \left(\nabla h(\tilde{x}), \frac{\partial h}{\partial t}(\tilde{x}) \right)\,.$$

Определим вектор-функцию

$$\tilde{A}(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h) = (\tilde{A}_1(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h), \ldots, \tilde{A}_n(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h)\,, b_1(t)|h'_t|^{p-2} h'_t) : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^{n+1}\,,$$

где

$$\tilde{A}_i(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h) = A_i(x, \nabla h)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Покажем, что данная вектор-функция удовлетворяет условиям (5.1.2) – (5.1.4).

Выполнение свойства (5.1.2) очевидно, поскольку

$$\tilde{A}(\tilde{x}, \lambda\,\widetilde{\nabla} h) = (\tilde{A}_1(\tilde{x}, \lambda\,\widetilde{\nabla} h), \ldots, \tilde{A}_n(\tilde{x}, \lambda\,\widetilde{\nabla} h)\,, b_1(t)\,|\lambda\, h'_t|^{p-2} \lambda\, h'_t) =$$

$$= \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,(\tilde{A}_1(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h), \ldots, \tilde{A}_n(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h)\,, b_1(t)\,|h'_t|^{p-2}\, h'_t) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,\tilde{A}(\tilde{x}, \widetilde{\nabla} h)\,.$$

Чтобы проверить выполнение (5.1.3) и (5.1.4) положим $\tilde{\xi} = (\xi, \eta)$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^1$. Заметим, что

$$\langle \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{\xi} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle A(x, \xi), \xi \rangle_{\mathbb{R}^n} + b_1(t)\, |\eta|^p$$

и

$$\left| \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \right| = \Big(|A(x, \xi)|^2 + |b_1(t)|^2\, |\eta|^{2(p-1)} \Big)^{1/2} .$$

Тем самым,

$$\langle \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{\xi} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \ge \mu_1\, k(x)\, |\xi|^p + b_1(t)\, |\eta|^p \ \ge k_1(\tilde{x})\, (|\xi|^p + |\eta|^p) \tag{5.3.11}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \right| &\le \Big(\mu_2^2\, k^2(x)\, |\xi|^{2(p-1)} + b_1^2(t)\, |\eta|^{2(p-1)} \Big)^{1/2} \ \le \\ &\le k_2(\tilde{x})\, (|\xi|^{2(p-1)} + |\eta|^{2(p-1)})^{1/2}, \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

где

$$k_1(\tilde{x}) = \min\{\mu_1\, k(x)\, , b_1(t)\}\, , \quad k_2(\tilde{x}) = \max\{\mu_2\, k(x)\, , b_1(t)\}\, . \tag{5.3.13}$$

В случае $1 \le p \le 2$ согласно неравенству Иенсена [BB, глава I, §16]

$$(|\xi|^p + |\eta|^p)^{1/p} \ge (|\xi|^q + |\eta|^q)^{1/q} \quad (0 < p \le q)$$

имеем

$$(|\xi|^p + |\eta|^p)^{1/p} \ge (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}\, ,$$

а потому

$$|\xi|^p + |\eta|^p \ge |\tilde{\xi}|^p$$

и соотношение (5.3.11) влечет

$$\langle \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{\xi} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \ge k_1(\tilde{x})\, |\tilde{\xi}|^p \quad (1 \le p \le 2)\, . \tag{5.3.14}$$

В случае $2 < p < \infty$ средние

$$\left(\frac{1}{2} |\xi|^p + \frac{1}{2} |\eta|^p \right)^{1/p}$$

монотонно возрастают [BB, глава I, §16], а потому

$$\left(\frac{1}{2} |\xi|^p + \frac{1}{2} |\eta|^p \right)^{1/p} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi|^2 + |\eta|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\tilde{\xi}|\, .$$

В силу (5.3.11), находим

$$\langle \tilde{A}(\tilde{x},\tilde{\xi}),\tilde{\xi}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \geq 2^{1-\frac{p}{2}} k_1(\tilde{x})\,|\tilde{\xi}|^p \quad (2 < p < \infty)\,. \tag{5.3.15}$$

Аналогично, при $2 < p < \infty$ на основании неравенства Иенсена имеем

$$\left(|\xi|^{2(p-1)} + |\eta|^{2(p-1)}\right)^{1/2(p-1)} \leq |\tilde{\xi}|$$

и потому соотношение (5.3.12) переписывается в виде

$$\left|\tilde{A}(\tilde{x},\tilde{\xi})\right| \leq k_2(\tilde{x})\,|\tilde{\xi}|^{p-1}\,, \quad 2 < p < \infty\,. \tag{5.3.16}$$

При $1 \leq p \leq 2$ выполняется

$$\left(\frac{1}{2}|\xi|^{2(p-1)} + \frac{1}{2}|\eta|^{2(p-1)}\right)^{1/2(p-1)} \leq \left(\frac{1}{2}|\xi|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2\right)^{1/2}$$

и потому

$$\left|\tilde{A}(\tilde{x},\tilde{\xi})\right| \leq 2^{1-\frac{p}{2}} k_2(\tilde{x})\,|\tilde{\xi}|^{p-1}\,, \quad 1 \leq p \leq 2\,. \tag{5.3.17}$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{D}} \frac{k_2(\tilde{x})}{k_1(\tilde{x})} \equiv \tilde{\mu} < \infty \tag{5.3.18}$$

вектор-функция $\tilde{A}(\tilde{x},\tilde{\xi})$ обладает свойствами (5.1.3) и (5.1.4) в области $\widetilde{D}$. При этом в качестве весовой функции $\tilde{k}(\tilde{x})$ можно положить, например, $\tilde{k}(\tilde{x}) = k_1(\tilde{x})$ и

$$\tilde{\mu}_1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 1 \leq p \leq 2, \\ 2^{1-p/2} & \text{при} \quad 2 < p < \infty\,, \end{cases} \quad \tilde{\mu}_2 = \begin{cases} \tilde{\mu} & \text{при} \quad 1 \leq p \leq 2, \\ 2^{1-p/2}\tilde{\mu} & \text{при} \quad 2 < p < \infty\,. \end{cases}$$

Если при этом предполагать, что $b_1(t) > 0$ на (τ_0,τ_1), то условия (5.1.1) для весовой функции $\tilde{k}(\tilde{x})$ будут выполняться с очевидностью.

Покажем, что $h(x,t)$ является почти решением в $\widetilde{D}$ эллиптического уравнения

$$\operatorname{div} \tilde{A}(\tilde{x},\widetilde{\nabla} h) = 0\,. \tag{5.3.19}$$

Зафиксируем произвольно функцию

$$\tilde{\varphi}(x,t) \in W^{1,p}(\widetilde{D}), \quad |\tilde{\varphi}(x,t)| \leq 1, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \widetilde{D}.$$

Мы имеем

$$\widetilde{\nabla}\tilde{\varphi} = (\nabla\tilde{\varphi}\,, \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi})$$

и потому

$$\int\limits_{D\times(\tau_0,\tau_1)} \langle \widetilde{\nabla}\tilde{\varphi},\, \tilde{A}(\tilde{x},\widetilde{\nabla}h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n+1} = \int\limits_{D\times(\tau_0,\tau_1)} \langle \nabla\tilde{\varphi}\,, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n+1} +$$

$$+ \int\limits_{D\times(\tau_0,\tau_1)} b_1(t)\, |h'_t|^{p-2} h'_t\, \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}\, d\mathcal{H}^{n+1}\,. \tag{5.3.20}$$

Однако,

$$\int\limits_{D\times(\tau_0,\tau_1)} \langle \nabla\tilde{\varphi}\,, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n+1} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} dt \int\limits_{D} \langle \nabla\tilde{\varphi}\,, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n}\,.$$

Функция $\tilde{\varphi}(x,t)$ финитна в D при каждом $t \in (\tau_0,\tau_1)$. Пользуясь соотношением (5.2.7) определения 1 обобщенного решения, находим

$$\int\limits_{D\times(\tau_0,\tau_1)} \langle \nabla\tilde{\varphi}\,, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n+1} = -\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} dt \int\limits_{D} \tilde{\varphi}\, B(t,h,h'_t)\, d\mathcal{H}^{n}\,. \tag{5.3.21}$$

Проверим выполнение свойства (5.2.10). Объединяя соотношения (5.3.20) и (5.3.21), получаем

$$\left| \int\limits_{\widetilde{D}} \langle \widetilde{\nabla}\tilde{\varphi},\, \tilde{A}(\tilde{x},\widetilde{\nabla}h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n+1} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{D} d\mathcal{H}^{n} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left[-\tilde{\varphi}\, B(t,h,h'_t)\, + b_1\, |h'_t|^{p-2} h'_t\, \tilde{\varphi}'_t \right]\, dt \right|.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\,\tilde{\varphi}'_t\,dt = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\,\tilde{\varphi}\right)\,dt -$$

$$-\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{\varphi}\frac{d}{dt}\left(b_1(t)\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\,dt = \left[\tilde{\varphi}(x,t)\,b_1(t)\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right]_{t=\tau_0}^{t=\tau_1} -$$

$$-\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{\varphi}(x,t)\frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\,dt\,.$$

Функция $\tilde{\varphi}(x,t)$ обращается в нуль при $t=\tau_0$, τ_1 и потому

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\,\tilde{\varphi}'_t\,dt = -\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{\varphi}(x,t)\frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\,dt\,.$$

Тем самым, мы имеем

$$\left|\int\limits_{\widetilde{D}} \langle\widetilde{\nabla}\tilde{\varphi},\ \tilde{A}(\tilde{x},\widetilde{\nabla}h)\rangle\,d\mathcal{H}^{n+1}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{D} d\mathcal{H}^n \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{\varphi}\,\left[B(t,h,h'_t)\, - \frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\right]\right|\,dt$$

Замечая, что $|\tilde{\varphi}|\le 1$, получаем

$$\left|\int\limits_{\widetilde{D}} \langle\widetilde{\nabla}\tilde{\varphi},\ \tilde{A}(\tilde{x},\widetilde{\nabla}h)\rangle\,d\mathcal{H}^{n+1}\right| \le s(\tau_0,\tau_1)\,, \tag{5.3.22}$$

где

$$s(\tau_0,\tau_1) = \int\limits_D d\mathcal{H}^n \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left| b_0\,|h|^{p-2}h + b_1\,|h|^{p-2}h\,h'_t - \frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right) \right| dt\,. \tag{5.3.23}$$

Оценка (5.3.22) справедлива для любой функции $\tilde{\varphi}$ описанного вида. Тем самым, доказана:

Теорема 1. *Пусть* $h(x,t) : D\times(\tau_0,\tau_1)$ *– обобщенное решение уравнения* (5.1.5)*, подчиненного условиям* (5.1.1) - (5.1.4)*, причем* $b_1(t) > 0$ *на* (τ_0,τ_1)*, и* $k(x)$*,* $b_1(t)$ *удовлетворяют* (5.3.18)*. Тогда* $h(x,t)$ *является почти решением уравнения* (5.3.19)*, удовлетворяющего условиям* (5.1.1) *–* (5.1.4) *в* $D\times(\tau_0,\tau_1)$ *с* $\tilde{k}(\tilde{x}) = k_1(\tilde{x})$*, определяемым в (5.3.13), и уклонение* $s(\tau_0,\tau_1)$ *почти решения определяется выражением* (5.3.23)*.*

4. (p,k)-Емкость

Нам потребуется понятие *взвешенной* $(p,\ k)$*-емкости*. Пусть D – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $A, B \subset D$ – подмножества $\mathbb{R}^n$ такие, что их замыкания $\overline{A}$, $\overline{B}$ относительно D не пересекаются. Каждая такая тройка множеств $(A, B; D)$ образует *конденсатор* в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что функция k обладает свойствами (5.1.1) и $p \geq 1$ – фиксировано. Определим (p,k)-емкость конденсатора $(A, B; D)$, полагая

$$\mathrm{cap}_{p,k}(A,B;D) = \inf \int\limits_D k(x)\,|\nabla\varphi|^p d\mathcal{H}^n\,, \tag{5.3.24}$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям φ класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ со свойствами: $\varphi|_A = 0$, $\varphi|_B = 1$.

Легко видеть, что для любой пары конденсаторов

$$(A,B;D) \quad \text{и} \quad (A_1,B_1;D)\,,$$

удовлетворяющей условиям $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, выполнено

$$\mathrm{cap}_{p,k}(A_1,B_1;D) \leq \mathrm{cap}_{p,k}(A,B;D).$$

В случае $p > 1$ теория $(k,\, p)$-емкости подробно описана в монографии [HKM93, стр. 27-54].

При $p = 2$ и $k \equiv 1$ мы имеем здесь обычную гармоническую емкость конденсатора, а при $p = n$, $k \equiv 1$, – конформную емкость [Sych83, глава III], [HKM93, глава 2].

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является (p,k)-*узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{cap}_{p,k}(D_r, D \setminus D_R; D) = 0\,. \tag{5.3.25}$$

Здесь $D_\tau = \{x \in D : |x| < \tau\}$.

Лемма. *Если область $D \subset \mathbb{R}^n$ является (p,k)-узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$ и $-\infty < \tau_0 < \tau_1 < +\infty$, то цилиндрическая область $\widetilde{D} = D \times (\tau_0, \tau_1)$ является $(p,\tilde{k})$-узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^{n+1}$ с $\tilde{k}(x,t) = k(x)$ при $(x,t) \in \widetilde{D}$.*

Доказательство. Пусть A, $B \subset D$ – произвольная пара непустых, замкнутых относительно D, непересекающихся множеств. Положим

$$\tilde{A} = \{(x,t) \in \widetilde{D} : x \in A\}\,, \quad \tilde{B} = \{(x,t) \in \widetilde{D} : x \in B\}\,.$$

Если функция $\varphi(x)$ допустима в вариационной задаче (5.3.24) при вычислении емкости конденсатора $(A, B; D)$, то функция

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \varphi(x)\,, \quad x \in D\,, \ \ t \in (\tau_0, \tau_1)\,,$$

допустима при вычислении емкости конденсатора $(\tilde{A}, \tilde{B}; \widetilde{D})$. Тем самым, мы имеем

$$\operatorname{cap}_{p,\tilde{k}}(\tilde{A}, \tilde{B}; \widetilde{D}) \le \int\limits_{D} \tilde{k}(\tilde{x})\, |\widetilde{\nabla}\tilde{\varphi}|^p\, d\mathcal{H}^{n+1} =$$

$$= \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} dt \int\limits_{D} k(x)\, |\nabla\varphi|^p\, d\mathcal{H}^n = (\tau_1 - \tau_0) \int\limits_{D} k(x)\, |\nabla\varphi|^p\, d\mathcal{H}^n\,.$$

Переходя к точной нижней грани по всем допустимым функциям φ, получаем

$$\operatorname{cap}_{p,\tilde{k}}(\tilde{A}, \tilde{B}; \widetilde{D}) \le (\tau_1 - \tau_0) \operatorname{cap}_{p,k}(A, B; D)\,. \tag{5.3.26}$$

Нетрудно видеть, что выполнение свойства (5.3.25) не зависит от выбора начала координат в $\mathbb{R}^n$ и величины $r > 0$. Поэтому, не умаляя общности можно считать, что в данной системе координат $\tau' = 0$, $\tau'' = \delta > 0$ и $0 < r < \delta < R < \infty$. В данных условиях мы имеем

$$\widetilde{\widetilde{D}_r} \subset \widetilde{D}_{r^*}\,, \quad \widetilde{\widetilde{D}_{R^*}} \subset \widetilde{D}_R\,,$$

где

$$\sqrt{r^2+\delta^2} = r^* \quad \text{и} \quad \sqrt{R^2-\delta^2} = R^*\,.$$

Таким образом, если $r^* < R^*$, то

$$\operatorname{cap}_{p,\tilde{k}}(\widetilde{\widetilde{D}_r}, \widetilde{D} \setminus \widetilde{\widetilde{D}_R}; \widetilde{D}) \le \operatorname{cap}_{p,\tilde{k}}(\widetilde{D}_r, \widetilde{D} \setminus \widetilde{D}_{R^*}; \widetilde{D})\,.$$

Пользуясь (5.3.26), заключаем, что

$$\operatorname{cap}_{p,\tilde{k}}(\widetilde{\widetilde{D}_r}, \widetilde{D} \setminus \widetilde{\widetilde{D}_R}; \widetilde{D}) \le (\tau_1 - \tau_0)\operatorname{cap}_{p,k}(D_r, D \setminus D_{R^*}; D)\,,$$

и узость D влечет узость $\widetilde{D}$. $\square$

5.4 Применения

Определим *основную частоту* открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, полагая

$$\lambda_{p,k}(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla u|^p d\mathcal{H}^n}{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,u^p d\mathcal{H}^n}\,, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0\,, \tag{5.4.27}$$

(в случае $k(x) \equiv 1$ см., например, [Band80], [Avkh06]).

Теорема 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $(\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1$, где $-\infty < \tau_0 < \tau_1 < +\infty$. Пусть $\widetilde{D} = D \times (\tau_0, \tau_1)$ – цилиндрическая область в $\mathbb{R}^{n+1}$ и при каждом $t \in (\tau_0, \tau_1)$ функция $h(x,t) : D \to \mathbb{R}^1$ является обобщенным решением уравнения* (5.1.5) *в D, подчиненного условиям* (5.1.1) - (5.1.4), *причем $b_1(t) > 0$ на (τ_0, τ_1) и $k(x)$, $b_1(t)$ удовлетворяют* (5.3.18). *Тогда если $h(x,t)$ удовлетворяет на границе области $\widetilde{D}$ предположению*

$h|_{\partial\widetilde{D}} \le 0$, то либо $h \le 0$ всюду в $\widetilde{D}$, либо при любых $0 < r < R < \infty$ выполнено

$$\int\limits_{\{|\tilde{x}|<r\}\cap\mathcal{O}} \tilde{k}(\tilde{x})\,|\widetilde{\nabla}h(\tilde{x})|^p\,d\mathcal{H}^{n+1} \le \frac{2M}{\tilde{\mu}}\,s(\tau_0,\tau_1)+4\tilde{\mu}^p M^p \operatorname{cap}_{p,\tilde{k}}(\mathcal{O}_r,\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}_R;\widetilde{D})\,, \tag{5.4.28}$$

где $\mathcal{O} = \{(x,t) \in \widetilde{D} : h(x,t) > 0\}$, $M = \sup\limits_{\mathcal{O}} h(x,t)$ и $s(\tau_0,\tau_1)$ определяется соотношением (5.3.23).

В частности, если D ограничена или является (p,k)-узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int\limits_{\{|\tilde{x}|<r\}\cap\mathcal{O}} \tilde{k}(\tilde{x})\,h^p(\tilde{x})\,d\mathcal{H}^{n+1} \le \frac{2s(\tau_0,\tau_1)M}{\tilde{\mu}\,\lambda_{p,\tilde{k}}(\mathcal{O})}\,. \tag{5.4.29}$$

Доказательство первого из утверждений представляет собой прямое следствие доказанной выше теоремы и соответствующего результата из [Mikl06b]. Чтобы убедиться в справедливости утверждения во второй части следствия достаточно далее воспользоваться приведенной выше леммой. □

Соотношение (5.4.29) дает оценку размеров открытого множества $\mathcal{O}$ и характеризует насколько решение h, $h|_{\partial\widetilde{D}} \le 0$, $\max_{(x,t)\in\widetilde{D}} h(x,t) = M$, уравнения (5.3.19) в области $\widetilde{D}$ отличается от 0.

Величина $\lambda_{p,k}(\mathcal{O})$ невозрастает с расширением множества $\mathcal{O}$ и потому

$$\lambda_{p,\tilde{k}}(\widetilde{D}) \le \lambda_{p,\tilde{k}}(\mathcal{O})\,. \tag{5.4.30}$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область и $u : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число. Подобласть $\Delta \subset \widetilde{D}$ называется *s-зоной стагнации* функции u, если существует постоянная C такая, что эта функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более, чем на s (см. [Zap06], [Zap07]).

К примеру, можно положить

$$\|u(x,t) - C\| \equiv \left(\int\limits_{\Delta} \tilde{k}(\tilde{x})\,|u(\tilde{x}) - C|^p\,d\mathcal{H}^{n+1}\right)^{1/p} \le s\,.$$

Соотношения (5.4.28), (5.4.29) служат также источниками оценок размеров областей стагнации решений. Именно, имеет место

Теорема 3. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область,* $\widetilde{D} = D \times (\tau_0, \tau_1)$ *– цилиндрическая область в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *и при каждом* $t \in (\tau_0, \tau_1)$ *функция* $h(x,t) : D \to \mathbb{R}^1$ *является обобщенным решением уравнения* (5.1.5) *в* D. *Предположим, что уравнение* (5.1.5) *подчинено условиям* (5.1.1) - (5.1.4), $b(t) > 0$ *на* (τ_0, τ_1) *и* $k(x)$, $b(t)$ *удовлетворяют* (5.3.18). *Тогда если* $h(x,t)$ *удовлетворяет на границе области* $\widetilde{D}$ *предположению* $h|_{\partial D} = 0$ *и* $\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) \neq 0\}$, *то*

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \tilde{k}(\tilde{x})\, h^p(\tilde{x})\, d\mathcal{H}^{n+1} \leq \frac{2s(\tau_0, \tau_1)M}{\tilde{\mu}\, \lambda_{p,\tilde{k}}(\widetilde{D})}\,, \tag{5.4.31}$$

где $s(\tau_0, \tau_1)$ *определяется формулой* (5.3.23).

В частности, если величина $s(\tau_0, \tau_1)$ *столь мала, что*

$$\frac{2s(\tau_0, \tau_1)M}{\tilde{\mu}\, \lambda_{p,\tilde{k}}(\widetilde{D})} \leq s\,,$$

то множество $\mathcal{O}$ *является* s*-зоной стагнации функции* h.

Для **доказательства** достаточно воспользоваться теоремой 2 и оценкой (5.4.30). □

Список литературы

[HKM93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, Oxford etc., 1993, 363 pp.

[Mikl06a] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006, 284 стр.

[Mikl06b] В.М. Миклюков, A-решения с особенностями как почти решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, стр. 31—50.

[BB] Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, М.: Мир, 1965, 276 стр.

[Sych83] А.В. Сычев, Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосибирск: изд-во "Наука", 1983, 152 стр.

[Band80] C. Bandle, Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne, 1980, 228 pp.

[Avkh06] Ф.Г. Авхадиев, Неравенства для интегральных характеристик областей, изд-во "Казанский гос. ун-т им. В.И. Ульянова-Ленина", Казань, 2006, 142 стр.

[Zap06] Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 1, под редакц. проф. В.М. Миклюкова, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006, 184 стр.

[Zap07] Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 2, под редакц. проф. В.М. Миклюкова, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007, 172 стр.

V.M. Miklyukov, **Solutions of parabolic PDE as solutions of elliptic equations**

Abstract. We state, that solutions of parabolic equations are almost solutions of some elliptic equations. As an application, we prove a special form of the maximum principle for solutions of parabolic equations.

6

О зонах стагнации в сверхмедленных процессах

В.М. Миклюков

Докл. Акад. Наук, т. 418, n. 3, 2008, с. 304-307.

В заметке приводятся некоторые результаты, касающиеся математического описания зон стагнации сверхмедленных процессов.

Под "сверхмедленными" понимаются процессы, текущие величины в которых меняются столь незначительно, что зафиксировать эти изменения трудно или даже совсем невозможно, ввиду их малости по сравнению с погрешностью измерений.

6.1 Понятие зоны стагнации

Под "сверхмедленными" далее понимаются процессы, текущие величины в которых меняются столь незначительно, что зафиксировать эти изменения трудно или даже совсем невозможно, ввиду их малости по сравнению с погрешностью измерений. Изменения величин становятся заметными лишь по прошествию достаточно длительного времени. Типичные примеры таких процессов доставляет гомеопатия. Однако, сверхмедленными являются не только, и не столько, физиологические процессы, но и значительный ряд других природных процессов, ввиду их сверхмедлительности выпадающих за пределы традиционных естественнонаучных исследований.

В заметке приводятся некоторые результаты, касающиеся математического описания зон стагнации таких процессов. В частности, указываются размеры зон стагнации решений квазилинейных уравнений параболического типа. Именно, пусть $D \subset \Omega$ – область и $h : D \to \mathbf{R}$ – некоторая функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число. Подобласть $\Delta \subset D$ называется *s-зоной* (*зоной стагнации*) функции h, если существует постоянная C такая, что эта функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более, чем на s. К примеру,

$$\|h(y) - C\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int\limits_{\Delta} |h(y) - C|^p \, d\mathcal{H}^n_\Omega \right)^{1/p} \leq s\,.$$

Случай решений уравнений эллиптического типа рассматривается в [1] – [5].

6.2 Почти решения на поверхности

Рассмотрим поверхность $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, заданную над областью $D \subset \mathbf{R}^n$ посредством локально билипшицевой вектор-функции

$$f = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) : D \to \mathbf{R}^m\,, \;\; x = (x_1, \ldots, x_n) \quad n < m\,.$$

Согласно теореме Радемахера – Степанова вектор – функция $f(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в области D и почти всюду в D определены измеримые по Лебегу коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Ω

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим

$$g(x) = \det\left(g_{ij}(x)\right)\,, \quad d\Omega = \sqrt{g(x)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\,,$$

$$g^{ij}(x) = \left(g_{ij}(x)\right)^{-1}\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

Пусть D – область на поверхности Ω, гомеоморфная шару $B^n(0,1)$ в $\mathbf{R}^n$ и пусть $g : D \to B^n(0,1)$ – некоторый гомеоморфизм D на шар. Зафиксируем замкнутые непересекающиеся подмножества P, $Q \subset \partial B^n(0,1)$

и обозначим через $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ множества всевозможных последовательностей $\{x_k\}$, лежащих в D и таких, что $g(x_k) \to P$, $g(x_k) \to Q$ соответственно.

Будем говорить, что *подобласть* $U \subset D$ *примыкает к* $\mathcal{P}$, если найдется последовательность $\{x_k\} \in \mathcal{P}$, лежащая в U.

Всякую тройку множеств вида $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ будем называть *конденсатором.*

Пусть $D \subset\subset \Omega$ – область на поверхности и пусть

$$A : \bigwedge^n(T(D)) \to \bigwedge^n(T(D))$$

– отображение, определенное почти всюду на слоении $\bigwedge^n(T(D))$ касательных n-ковекторов.

Предположим, что для почти всех $y \in D$ отображение A определено на пространстве $\bigwedge^n(T_y(D))$ касательных n-ковекторов, то есть, для почти всех $y \in D$ отображение

$$A(y,\ .\ ) : \xi \in \bigwedge^n(T_y(D)) \to \bigwedge^n(T_y(D))$$

определено и непрерывно. Мы предполагаем, что отображение

$$y \mapsto A(y, \Psi)$$

измеримо для всех измеримых n-ковекторных полей Ψ и

$$A(y, \lambda\xi) = \lambda\, |\lambda|^{p-2}\, A(y, \xi)\,, \quad \lambda \in \mathbf{R}^1\,. \tag{1}$$

Предположим, что для почти всех $y \in D$ и всех $\xi \in \bigwedge^n(T_y(D))$ мы имеем

$$|A(y, \xi)|_\Omega^{p/(p-1)} \le \nu\, \langle \xi, A(y, \xi)\rangle_\Omega\,, \tag{2}$$

при $p \ge 1$ и с некоторой постоянной $\nu > 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}_\Omega A(y, \nabla_\Omega h) = a\, |h|^{p-2}\, \frac{\partial h}{\partial t}(y, t)\,, \quad a = \mathrm{const} > 0\,. \tag{3}$$

В случае $p = 2$ имеем стандартное уравнение теплопроводности. В случае $a = 0$ мы будем называть решения h уравнения (3) $\mathcal{A}$-*гармоническими* функциями [11, глава 6].

Для произвольной локально липшицевой функции $\phi : D \subset \Omega \to \mathbf{R}$, мы обозначаем через $D_b(\phi)$ множество всех точек $a \in D$, в которых ϕ

не имеет полного дифференциала. Символом $D_b(\Omega)$ ниже обозначается множество точек $y \in \Omega$, в которых Ω не имеет касательной плоскости.

Пусть $U \subset D$ – подобласть и пусть $\partial' U = \partial U \setminus \partial D$ – ее относительная граница. Если множество $\partial' U$ является $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемым, то оно имеет локально конечный периметр в смысле Де-Джорджи и $\mathcal{H}^{n-1}$ – почти всюду на ∂U существует единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ (см. [9], разделы **3.2.14, 3.2.15**).

Определим понятие обобщенного решения уравнения (3) с нулевыми граничными данными Неймана на некоторых, наперед заданных участках границы области. Рассмотрим конденсатор $(D, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ на поверхности Ω. Подобласть $U \subset D$ назовем *допустимой*, если U не примыкает ни к $\mathcal{P}$, ни к $\mathcal{Q}$ и имеет $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемую относительную границу.

Локально липшицева функция $h : D \to \mathbf{R}$ является обобщенным решением уравнения (3), *если для всякой допустимой подобласти $U \subset D$ и произвольной функции $\phi \in \mathrm{Lip}(\overline{U})$ со свойствами*

$$\mathcal{H}^{n-1}_{\Omega} \left(\partial' U \cap \left(\left(D_b(\phi) \cup D_b(\Omega)\right)\right) = 0\right.$$

выполнено

$$\int\limits_{\partial' U} \phi \langle A(y, \nabla_\Omega h), \mathbf{n} \rangle_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1}_\Omega = \tag{4}$$

$$= \int\limits_U \langle \nabla_\Omega \phi, A(y, \nabla h) \rangle_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1}_\Omega + a \int\limits_U \phi \, |h|^{p-2} \frac{\partial h}{\partial t} \, d\mathcal{H}^{n-1}_\Omega \, .$$

Простые соображения показывают, что в случае гладкой поверхности Ω, гладкой границы ∂D, гладких A_i $(i = 1, \ldots, n)$ и C^2-функции h выполнение (4) влечет соотношение (3) с граничным условием

$$\langle A(y, \nabla h), \overline{n} \rangle_\Omega = 0 \tag{5}$$

всюду на ∂D вне граничного множества $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ §7.2.1, [9]. Ниже мы будем говорить, что данное определение описывает $\mathcal{A}$-гармонические функции h с граничным условием (5) на указанном множестве.

6.3 Признаки s-зоны

Рассмотрим конденсатор $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ на поверхности Ω и обозначим через $\mathcal{F}$ – множество локально липшицевых функций $\phi(y) : D \to (0, +\infty)$, обладающих свойствами:

$$\lim_{\{y_k\}\in\mathcal{P}} \phi(y_k) = 0\,, \qquad \lim_{\{y_k\}\in\mathcal{Q}} \phi(y_k) = 1 \tag{6}$$

и таких, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{D'} |\nabla_\Omega \phi(y)|_\Omega < \operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\nabla_\Omega \phi(y)|_\Omega < \infty\,. \tag{7}$$

Зафиксируем постоянное векторное поле $A(y, \xi)$ и определим A-емкость конденсатора $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$, полагая

$$\operatorname{cap}_A(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D) = \inf_{\phi\in\mathcal{F}} \int\limits_D \langle A(y, \nabla_\Omega \phi), \nabla_\Omega \phi\rangle_\Omega \, d\mathcal{H}^n\,, \tag{8}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям ϕ со свойствами (6), (7).

В частном случае $A(y, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ при $p = 2$ мы имеем обычную гармоническую емкость конденсатора на поверхности, а при $p = n$ – конформную емкость [глава 2, 11].

Пусть $D \subset \Omega$ – ограниченная область, $(\tau_0, \tau) \subset \mathbf{R}$, и пусть

$$h = h(y, t) : D \times (\tau_0, \tau) \to \mathbf{R}$$

– обобщенное решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (2). Мы будем предполагать, что при всех $t > 0$ выполнено

$$h|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial D\setminus\mathcal{P}} = 0\,,$$

где $\mathcal{P}$ – некоторое граничное множество (случай $\mathcal{P} = \emptyset$ не исключается).

Положим

$$\lambda_{\mathcal{P}}(D) = \inf_\phi \frac{\int\limits_D |A(y, \nabla_\Omega \phi)|^{p/(p-1)} \, d\mathcal{H}^n_\Omega}{\int\limits_D |\phi|^p \, d\mathcal{H}^n_\Omega}$$

и точная нижняя грань берется по всевозможным функциям ϕ, удовлетворяющим условиям

$$\phi|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial D \setminus \mathcal{P}} = 0\,.$$

Теорема 1. *Если при всех $t > t_0$ решение уравнения* (3), *удовлетворяющего предположениям* (2), *подчинено условию*

$$h|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial D \setminus \mathcal{P}} = 0\,,$$

то при любых τ', τ'', $\tau_0 < \tau' < \tau'' < \tau$, выполнено

$$\|h(y,\tau')\|_{L^p(D)} \le \|h(y,\tau'')\|_{L^p(D)} \exp\left\{\frac{p}{2a\,\nu}\,\lambda_{\mathcal{P}}(D)\,(\tau'-\tau'')\right\}\,.$$

В частности, если для некоторого $s > 0$ выполнено

$$\|h(x,\tau'')\|_{L^p(D)} \exp\left\{\frac{p}{2a\,\nu}\,\lambda_{\mathcal{P}}(D)\,(\tau'-\tau'')\right\} < s\,, \tag{9}$$

то множество $D \times [\tau', \tau'']$, $t_0 < \tau' < \tau'' < \tau$, является s-зоной решения h.

Условию (9) можно удовлетворить, например, если величина $\tau'' - \tau'$ достаточно велика или достаточно мала норма $\|h(y,\tau'')\|_{L^p(D)}$.

В случае гармонических в $\mathbf{R}^2$ функций см. [9].

6.4 Оценки почти решения

Если s-зона $U \subset D$ определена для некоторой величины $s > 0$, не превосходящей ошибки измерения функции f, то ключевой проблемой становится поиск косвенных методов получения информации об изменении f в U, не использующих прямых измерений. Ниже мы приводим один из подходов к изучению поведения решений в таких зонах стагнации — мы указываем оценки снизу колебания решения f на подобластях U. Указанные оценки позволяют, в частности, при некоторых специальных условиях на решения делать заключения об их нетривиальности в s-зонах.

Нам потребуется понятие почти-решения A-гармонического уравнения, введенное в [7]. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ является *почти-решением* A-гармонического уравнения, если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(y) \in W^1_q(D)\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \quad |\varphi(y)| \le 1\,,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset D$ выполнено:

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla_\Omega \varphi, A(y, \nabla_\Omega h) \rangle \; d\mathcal{H}^n \right| \le \varepsilon\,.$$

Величина $\varepsilon > 0$ называется *уклонением* почти решения h (см. [7]).

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – n-мерная локально билипшицева поверхность и пусть $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ – произвольный конденсатор в Ω. Предположим, что h – локально липшицево почти-решение уравнения (1) – (3) с $a = 0$, уклонением $\varepsilon > 0$ и обобщенным граничным условием (5) на $\partial D \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$.

Пусть Σ_1, Σ_2, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, – гиперповерхности в D, разделяющие $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, и пусть U – подобласть D, заключенная между Σ_1 и Σ_2. Нетрудно доказать, что

$$|I(\Sigma_1) - I(\Sigma_2)| \le \varepsilon\,,$$

где $\varepsilon > 0$ – уклонение почти-решения h.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – n-мерная локально билипшицева поверхность и пусть $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ – произвольный конденсатор в Ω. Пусть h – локально липшицево почти-решение уравнения (1) – (3) с $a = 0$, уклонением $s > 0$, обобщенным граничным условием (5) на $\partial D \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$, для которого*

$$\mathcal{I} - s \equiv \inf_{\Sigma} I(\Sigma) - s > 0\,.$$

Тогда для произвольной пары непересекающихся $(n-1)$-мерных поверхностей Σ_1 и Σ_2, лежащих в D и разделяющих $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ выполнено

$$\left(\frac{\mathcal{I} - s}{\operatorname{cap}_A(\Sigma_1, \Sigma_2; U)} \right)^{1/p} \le \sup\{y' \in \Sigma_1,\ y'' \in \Sigma_2 :\ |h(y') - h(y'')|\}\,.$$

Здесь U – подобласть D, заключенная между сечениями Σ_1, Σ_2.

Предположим, что мы находимся в условиях теоремы 1. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область и $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – локально билипшицева поверхность, $1 \le n < m$. Положим $\Sigma(t') = \{h(y) = t'\}$, $\Sigma(t'') = \{h(y) = t''\}$. Пусть

$$\tilde{\varphi}(y,t) \in \operatorname{Lip} U, \quad \operatorname{supp} \tilde{\varphi}(y,t) \subset U\,, \quad |\tilde{\varphi}(y,t)| \le 1\,,$$

и пусть

$$\tilde{A}(y, \nabla h) = (A_1(y,\nabla h), \ldots, A_n(y,\nabla h)\,, a\,|h|^{p-2}\,\frac{\partial h}{\partial t}) : D \times (\tau', \tau'') \to \mathbf{R}^{n+1}\,.$$

Теорема 3. *В предположениях теоремы 1 функция $h(y,t)$ есть почти-решение в U уравнения*

$$\operatorname{div} \tilde{A}(y, \nabla h) = 0$$

с уклонением $\varepsilon_2 = \varepsilon\,(\tau'' - \tau') + a\,\varepsilon_1$, где

$$\varepsilon = \sup_{|\varphi| \le 1} \left| \int\limits_D \langle \nabla_y \varphi,\, A(y,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^n_\Omega \right|, \quad \varepsilon_1 = \int\limits_D d\mathcal{H}^n_\Omega \int\limits_{\tau'}^{\tau''} \left| \frac{\partial}{\partial t}\left(|f|^{p-2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right| dt +$$

$$+ \int\limits_D \left[\left| |f(y,\tau'')|^{p-2}\,\frac{\partial f}{\partial t}(y,\tau'')\right| + \left| |f(y,\tau')|^{p-2}\,\frac{\partial f}{\partial t}(y,\tau')\right| \right] d\mathcal{H}^n_\Omega\,.$$

6.5 Условие нетривиальности почти решения в s-зоне

На основании теоремы 2 приходим к утверждению:

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – n-мерная локально билипшицева поверхность и $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ – произвольный конденсатор в Ω. Пусть h – локально липшицево решение уравнения (1) – (3) с обобщенным граничным условием (5) на $\partial D \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$, для которого*

$$\mathcal{I} - s_2 \equiv \inf_{\Sigma} I(\Sigma) - s_2 > 0\,.$$

Тогда для произвольной пары непересекающихся $(n-1)$-мерных поверхностей $\Sigma_1 = \Sigma(\tau')$ и $\Sigma_2 = \Sigma(\tau'')$, лежащих в D и разделяющих $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$

выполнено

$$\left(\frac{\mathcal{I} - s_2}{\mathrm{cap}_A\,(\Sigma_1, \Sigma_2; U)}\right)^{1/p} \leq \sup\{y' \in \Sigma_1,\ y'' \in \Sigma_2 :\ |h(y') - h(y'')|\}\,.$$

Здесь U – подобласть D, заключенная между сечениями Σ_1, Σ_2.

Цитированная литература

[1] В.М. Миклюков, Математические Труды, Новосибирск: Институт математики СО РАН, т. 5, n. 1, 2002, 84-101. [2] В.М. Миклюков, В сб. Математический и прикладной анализ, вып. 1, Тюменск. гос. ун-т, 2003, 89-118. [3] V.M. Miklyukov, S.-S. Chow and V. P. Solovjov, IJMMS, v. 62, 2004, 3339-3356. [4] В.М. Миклюков, Записки семинара "Сверхмедленные процессы", Волгоград, изд-во ВолГУ, 2006, 52-54. [5] В.М. Миклюков, там же, 40-45. [6] В.М. Миклюков, там же, 58-73. [7] В.М. Миклюков, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, 31-50. [8] F. Braudel, Les Jeux de L'échange, Civilisation matérielle, économie et capitalisme, XV - XVII'siécle, tome. 2, Librairie Armand Colin, Paris, 1979. [9] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград, изд-во ВолГУ, 2006, 284 pp.) [10] H. Federer, Geometric Measure Theory, - Springer-Verlag, Berlin, 1969. [11] Ю.Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосибирск: Наука, 1982. [12] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, Oxford etc., 1993.

V.M. Miklyukov, **On Stagnation Zones in Superslow Processes.**

Abstract. We investigate stagnation zones of superslow processes described by solutions of partial differential parabolic equations and almost solutions of elliptic equations on bi-Lipschitz surfaces. With the domain width being much less than its length and special boundary conditions, these solutions can be almost constant over large subdomains. Such domains are called stagnation zones ($s-$zones). We estimate the size, the location of these $s-$zones and study behavior of solutions and almost solutions on $s-$zones.

V.M. Miklyukov, **On stagnation zones in superslow processes.**

Abstract. We bring some results on mathematical description of stagnation zones in superslow processes.

7

Оценки размеров зоны стагнации почти решений уравнений параболического типа

В.М. Миклюков

Сиб. журн. индустриальной матем.,
т. XI, n. 3(35), 2008, с. 96-101.

Изучается поведение почти решений нелинейных уравнений параболического типа. Получены оценки размеров зоны стагнации почти решений.

7.1 Введение

В работе приводятся оценки размеров зон стагнации почти решений уравнений параболического типа — задаче, возникающей при исследовании сверхмедленных процессов [1], [2]. Под "сверхмедленными" мы понимаем процессы, текущие величины в которых меняются столь незначительно, что зафиксировать эти изменения трудно или даже совсем невозможно, ввиду их малости по сравнению с погрешностью измерений. Изменения величин становятся заметными лишь по прошествию достаточно длительного времени.

Типичные примеры таких процессов доставляет медицина и, в особенности, гомеопатия. Однако, сверхмедленными являются не только, и не столько, физиологические процессы, но и значительный ряд других природных процессов, ввиду их сверхмедлительности выпадающих за пределы традиционных естественнонаучных исследований. Нетрудно указать подобные примеры, имеющие место в физике, механике, экономике, истории, лингвистике, экологии.

К примеру, при течениях жидкости в тонких и длинных трубках возникают "зоны стагнации" — области, в которых потоки почти неподвижны. Если отношение длины трубки к ее диаметру велико, то потенциальная функция и функция тока почти неизменны на весьма протяженных участках. Подобная ситуация возникает, к примеру, при стационарных течениях жидкости в длинных трубопроводах или (микро-) наноканалах.

Априорная информация относительно зон стагнации способствует более оптимальной организации вычислительного процесса за счет замены искомых функций соответствующими постоянными в таких зонах.

Получаемые результаты оказываются небесполезными, в частности, для приложений в экономической географии. В случае, когда функция характеризует интенсивность товарообмена на том либо ином географическом пространстве, теоремы об ее зонах стагнации дают (при надлежащих ограничениях на выбираемую модель) оценки геометрических размеров зоны стагнации мира-экономики [3, стр. 18-19]. К примеру, если поддуга границы области абсолютно нетранспарентна, а поток векторного поля градиента функции через остальную часть границы достаточно мал, то область является для этой функции зоной стагнации.

Выяснение параметров влияния на размеры зон стагнации, открывает возможность практических рекомендаций к целенаправленным изменениям конфигурации и, в частности, уменьшению либо увеличению таких зон.

Условимся в обозначениях. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $n > 1$, со стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $E \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество.

Символом $C(E)$ обозначается класс функций, непрерывных на на множестве E, символом $C^{1,1}(E)$ – множество функций, имеющих производные, удовлетворяющие условию Липшица на E.

Функция h принадлежит классу $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, если она имеет обобщенные в смысле С.Л. Соболева частные производные

$$\partial h / \partial x_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

суммируемые по D со степенью p или, что то же самое, если h абсолютно непрерывна внутри почти всех сечений области D прямыми, параллельными осям координат, и $\partial h/\partial x_i \in L^p(D)$, $i = 1, \ldots, n$. Функция h принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$, если она принадлежит классу $W^{1,p}(D')$ для всякой подобласти $D' \Subset D$.

7.2 Уравнения

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно;

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ выполнено:

$$\langle \xi, A(x,\xi)\rangle > 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \quad \xi \neq 0\,. \tag{7.2.1}$$

Пусть $-\infty \leq \tau_0 < \tau_1 \leq +\infty$ – фиксированные числа. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = B(t, h, h'_t)\,, \tag{7.2.2}$$

где

$$h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1\,,$$

$$\nabla h = (h'_{x_1}, \ldots, h'_{x_n}) \ - \ \text{формальный градиент}\,,$$

$$B(t, h, h'_t) = b_0(t)\,|h|^{p-2}\,h + b_1(t)\,|h|^{p-2}\,\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

и

$$b_0(t),\, b_1(t) : (\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

– локально липшицевы на (τ_0, τ_1) функции.

В случае b_0, $b_1 \equiv 0$ простейшим уравнением указанного класса является уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) = 0\,, \quad p > 1. \tag{7.2.3}$$

Решения h уравнения (7.2.3) называются p-гармоническими функциями, а само уравнение – p-гармоническим [4, глава 6].

Рассматриваемый в работе класс уравнений включает в себя при b_0, $b_1 \equiv 0$ уравнение максимальной поверхности в пространстве Минковского

$$\operatorname{div} \frac{\nabla h(x)}{\sqrt{1 - |\nabla h(x)|^2}} = 0 \tag{7.2.4}$$

(см., например, [5, раздел 1.5.3]).

В случае $p = 2$, $b_0 \equiv 0$, $b_1 \equiv 1$ и $A(x, \xi) = \xi$ имеем стандартное уравнение теплопроводности в $\mathbb{R}^n$.

7.3 Почти решения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $E \subset \partial D$ – замкнутое множество и пусть $(\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1$.

Определение 1. *Непрерывная функция* $h : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$ *класса* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ *является почти решением уравнения* (7.2.2) *, если для всякой непрерывной функции*

$$\phi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D) \cap C(D \cup E)\,, \quad 0 \leq |\phi| \leq 1\,, \quad \phi|_E = 0\,,$$

при каждом $t \in (\tau_0, \tau_1)$ *выполнено*

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla \phi, A(x, \nabla h) \rangle \, d\mathcal{H}^n + \int\limits_D \phi \, B(t, h, h'_t) \, d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon\,. \tag{7.3.5}$$

Величина $\varepsilon \geq 0$ называется *уклонением* почти решения h [6].

Поясним введенное понятие в случае, когда $\varepsilon = 0$. Если множество ∂D является счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемым, то оно имеет локально конечный периметр в смысле Де-Джорджи и $\mathcal{H}^{n-1}$ – почти всюду на ∂D существует единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ [7, §**3.2**]. Простые соображения, опирающиеся на обобщенную формулу Остроградского - Гаусса для липшицевых функций в областях с $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемыми границами (см. [8, теорема 2.6.2]), показывают, что принадлежность h классу $C^{1,1}\left(\overline{D}\right)$ и выполнение (7.3.5) с указанным произволом на функцию ϕ влечет выполнение соотношения (7.2.2) в стандартном смысле и граничного условия

$$\langle A(x, \nabla h), \mathbf{n} \rangle|_{\partial D \setminus E} = 0\,,$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к ∂D.

3. Зоны стагнации

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $h : D \to \mathbb{R}^1$ – функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число.

Определение 2. [1], [2] *Подобласть $\Delta \subset D$ называется s-зоной (зоной стагнации) функции h, если существует постоянная C такая, что данная функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более, чем на s.*

К примеру,

$$\|h(x) - C\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int\limits_{\Delta} |h(x) - C|^p \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/p} \leq s\,.$$

7.4 Основная теорема

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область и $(\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1$. Пусть $E \subset \partial D$ – непустое замкнутое множество и пусть

$$h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$$

– почти решение уравнения (7.2.2), причем $b_1(t) > 0$ всюду на (τ_0, τ_1).

Мы будем предполагать, что при всех $t \in (\tau_0, \tau_1)$ функция h обращается в нуль на E. Выберем $\phi = h$ в (7.3.5). В соответствии с определением почти решения имеем

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla h, A(x, \nabla h) \rangle \, d\mathcal{H}^n + \int\limits_D b_0 \, |h|^p \, d\mathcal{H}^n + \right.$$

$$\left. + \int\limits_D b_1 \, h \, |h|^{p-2} \, \frac{\partial h}{\partial t} \, d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon\,.$$

Далее заметим, что

$$(|h|^p)'_t = \left(\left(\sqrt{h^2}\right)^p \right)'_t = p \left(\sqrt{h^2}\right)^{p-2} h \, h'_t = p \, h \, |h|^{p-2} \, \frac{\partial h}{\partial t}\,.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_D b_1\, h\, |h|^{p-2}\, \frac{\partial h}{\partial t}\, d\mathcal{H}^n = \frac{1}{p}\int\limits_D b_1(t)\, \left(|h|^p\right)'_t\, d\mathcal{H}^n =$$

$$= \frac{b_1(t)}{p}\frac{d}{dt}\int\limits_D |h|^p\, d\mathcal{H}^n\,.$$

Мы имеем

$$\int\limits_D \langle \nabla h, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^n \ge \eta_{p,E}(D)\int\limits_D |h|^p\, d\mathcal{H}^n\,,$$

где

$$\eta_{p,E}(D) = \inf_{\phi}\frac{\int\limits_D \langle \nabla \phi, A(x,\nabla \phi)\rangle\, d\mathcal{H}^n}{\int\limits_D |\phi|^p\, d\mathcal{H}^n}$$

и точная нижняя грань берется по всевозможным локально липшицевым функциям $\phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющим условиям $\phi|_E = 0$.

В случае $E = \partial D$ введенная величина представляет собой обобщение известной величины, называемой *основной частотой* (см., например, [9, глава III], [10, глава 4]), и является предметом самостоятельного исследования.

Положим

$$I(t) = \int\limits_D |h(x,t)|^p\, d\mathcal{H}^n\,.$$

Мы имеем

$$p\, b_0(t)\, I(t) + p\, \eta_{p,E}(D)\, I(t) + b_1(t)\, I'(t) \le p\,\varepsilon\,. \tag{7.4.6}$$

Чтобы проинтегрировать дифференциальное неравенство (7.4.6) найдем интегрирующий множитель. Пусть $q(t) : (\tau', \tau'') \to \mathbb{R}^1$ – неотрицательная, локально липшицева функция. Тогда

$$p\, q(t)\big(b_0(t) + \eta_{p,E}(D)\big)\, I(t) + q(t) b_1(t)\, I'(t) \le p\,\varepsilon\, q(t)\,.$$

Найдем функцию $q(t)$, для которой

$$p\left[q(t)\big(b_0(t)+\eta_{p,E}(D)\big)\right]' = q(t)\,b_1(t)\,.$$

Легко видеть, что

$$\frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{1}{b_1(t)}\,\left[p\,\eta_{p,E}(D)+p\,b_0(\tau)-b_1'(t)\right]\,,$$

и далее,

$$q(t)=q(t_0)\mathrm{exp}\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\left[p\,\eta_{p,E}(D)+p\,b_0(\tau)-b_1'(\tau)\right]\frac{d\tau}{b_1(\tau)}\right\}\,,$$

где $t_0\in(\tau',\tau'')$ – произвольная точка.

Таким образом,

$$[q(t)b_1(t)\,I(t)]'\le p\,\varepsilon\,q(t)\,,$$

откуда при любых $\tau_0\le\tau'\le\tau''\le\tau_1$ имеем

$$q(\tau'')b_1(\tau'')I(\tau'')\le q(\tau')\,b_1(\tau')\,I(\tau')+p\,\varepsilon\int\limits_{\tau'}^{\tau''}q(t)\,dt\,.$$

Тем самым, учитывая, что $b_1(t)>0$ при $t\in(\tau_0,\tau_1)$, получаем

$$I(\tau'')\le I(\tau')\,\exp\left\{-\int\limits_{\tau'}^{\tau''}\frac{p\,b_0(t)+p\,\eta_{p,E}(D)}{b_1(t)}\,dt\right\}+\varepsilon\,G(\tau',\tau'')\,, \qquad (7.4.7)$$

где

$$G(\tau',\tau'')=\frac{p}{b_1(\tau'')}\int\limits_{\tau'}^{\tau''}dt\,\exp\left\{-\int\limits_{t}^{\tau''}\frac{p\,b_0(\tau)+p\,\eta_{p,E}(D)}{b_1(\tau)}\,d\tau\right\}\,.$$

На основании (7.4.7) приходим к утверждению:

Теорема. *Пусть $h(x,t)$ – почти решение уравнения* (7.2.2)*, в котором $b_1(t)>0$ на (τ_0,τ_1). Предположим, что множество $E\subset\partial D$ не пусто и $h|_E=0$.*

Тогда при любых τ', τ'', $\tau_0 < \tau' < \tau'' < \tau_1$, имеет место соотношение

$$\|h(x,\tau'')\|_{L^p(D)} \le$$

$$\le \|h(x,\tau')\|_{L^p(D)} \exp\left\{ -\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \frac{p\, b_0(t) + p\, \eta_{p,E}(D)}{b_1(t)}\, dt \right\} + \varepsilon\, G(\tau',\tau'') \,.$$

В частности, если для некоторого $s > 0$ выполнено

$$\|h(x,\tau')\|_{L^p(D)} \exp\left\{ -\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \frac{p\, b_0(t) + p\, \eta_{p,E}(D)}{b_1(t)}\, dt \right\} + \varepsilon\, G(\tau',\tau'') \le s \,, \tag{7.4.8}$$

то множество $D \times [\tau', \tau'']$ является s-зоной почти решения h.

В случае $\mathcal{A}$-гармонических в смысле [4] функций см. [11].

Замечание. Если $\varepsilon = 0$, функции $b_0(t)$ и $b_1(t)$ определены на $(\tau_0, +\infty)$ и таковы, что

$$\int^{+\infty} (p\, b_0(t) + p\, \eta_{p,E}(D))\, \frac{dt}{b_1(t)} = +\infty \,,$$

и норма $\|h(x,\tau)\|_{L^p(D)}$ ограничена, то

$$\|h(x,\tau)\|_{L^p(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty \,.$$

Данное условие гарантирует непустоту s-зоны при любом, сколь угодно малом $s > 0$.

7.5 Оценки $\eta_{p,E}(D)$

В отдельных случаях величина $\eta_{p,E}(D)$ допускает оценки через известные характеристики. Отметим два простых случая. Пусть $E = \partial D$.

Предположим, что, как и в p-гармоническом уравнении (7.2.3), вектор-функция A имеет вид

$$A(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi \,, \quad p \ge 1.$$

Мы имеем

$$\eta_{p,\partial D}(D) = \lambda_p(D) = \inf_{\phi} \frac{\int\limits_D |\nabla\phi|^p \, d\mathcal{H}^n}{\int\limits_D |\phi|^p \, d\mathcal{H}^n}$$

и точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям $\phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^1$ таким, что $\phi|_{\partial D} = 0$.

Здесь $\lambda_p(D)$ есть хорошо известная величина, называемая основной частотой области D [9], [10]).

Если, как и в уравнении (7.2.4) максимальных поверхностей,

$$A(x,\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\,,$$

то

$$\langle \xi, A(x,\xi)\rangle = \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1-|\xi|^2}} \geq |\xi|^2\,.$$

Таким образом, здесь имеем

$$\eta_{2,\partial D}(D) \geq \lambda_2(D)\,.$$

Список литературы

[1] Записки семинара ”Сверхмедленные процессы”, вып. 1, под редакц. проф. В.М. Миклюкова, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006, 184 стр.

[2] Записки семинара ”Сверхмедленные процессы”, вып. 2, под редакц. проф. В.М. Миклюкова, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007, 172 стр.

[3] F. Braudel, Les Jeux de L’échange, Civilisation matérielle, économie et capitalisme, XV - XVII’siécle, tome. 3, Paris: Librairie Armand Colin, 1979.

[4] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, Oxford etc., 1993, 363 pp.

[5] В.А. Клячин, В.М. Миклюков, Трубки и ленты в пространстве - времени, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2004, 326 стр.

[6] В.М. Миклюков, A-решения с особенностями как почти решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, стр. 31—50.

[7] Г. Федерер, Геометрическая теория меры, М: изд-во "Наука", 1969, 760 стр.

[8] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006, 284 стр.

[9] C. Bandle, Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne, 1980, 228 pp.

[10] Ф.Г. Авхадиев, Неравенства для интегральных характеристик областей, изд-во "Казанский гос. ун-т им. В.И. Ульянова-Ленина", Казань, 2006, 142 стр.

[11] V.M. Miklyukov, Stagnation Zones of A-Solutions, Georgian Mathematical Journal, v. 14, n. 3, 2007, 519—531.

V.M. Miklyukov, **Some estimates of stagnation zones of almost solutions of parabolic equations.**

Abstract. It are given estimates of stagnation zones of almost solutions of parabolic differential equations with partial derivatives.

8

Некоторые условия дифференцируемости в точке почти квазиконформных отображений

В.М. Миклюков

В сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы".
Вып. 4. Волгоград: изд-во ВолГУ. 2009.

Приводятся условия существования полного дифференциала в точке (в том числе — граничной) для почти квазиконформных отображений. При этом допускается многократная смена ориентации отображения в области.

8.1 Предварительные понятия

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{R}^m$ – вектор-функция. Говорят, что вектор-функция $f : D \to \mathbb{R}^m$ имеет в точке $a \in D$ *полный дифференциал*, если существует постоянная матрица

$$C = \{C_{ij}\}_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$$

такая, что

$$f(x) - f(a) = C \cdot (x-a) + o(|x-a|) \quad (x \to a, \quad x \in D)\,. \qquad (8.1.1)$$

Известно, что функция f имеет полный дифференциал в точке $a \in D$, если в окрестности a существуют частные производные $\partial f_i / \partial x_j$ ($i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$), непрерывные в a. Имеются примеры, показывающие, что непрерывность частных производных в a не является необходимым условием существования в a полного дифференциала.

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$. Положим

$$f'(x) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right)$$

и, далее,

$$\|f'(x)\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right)^{1/2} .$$

Будем говорить, что отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathcal{W}^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, если для любой подобласти $D' \Subset D$ найдется постоянная $p > n$ такая, что $f \in W^{1,p}(D')$. Непрерывное отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является *почти квазиконформным* в D с измеримой функцией $K(x) \geq 0$ и локально интегрируемой функцией $\delta(x) : D \to \mathbb{R}$, если $f \in \mathcal{W}^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ и почти всюду в области D выполнено

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x)\ |J(x, f)| + \delta(x)\,, \tag{8.1.2}$$

где

$$J(x, f) = \det\ (f'(x))\ .$$

Понятие почти квазиконформного отображения было введено Кэллендером в [6], однако заметим, что условие (8.1.2) в [6] записывается в несколько ином виде. Именно, требуется, чтобы $K(x) \equiv \mathrm{const}$, а вместо $|J(x, f)|$ стоит $J(x, f)$. Так что рассматриваемый здесь класс отображений существенно шире рассматриваемого Кэллендером в [6]. В частности, это позволяет включить в рассмотрение вырождающиеся квазиконформные отображения.

При условии сохранения знака якобиана и предположениях

$$K \equiv \mathrm{const} > 0, \quad \delta \equiv 0$$

требование (8.1.2) означает, что отображение f является отображением с ограниченным искажением [23, §3 глава I] (или, в терминологии [28, раздел 14.1] — квазирегулярным отображением). Следует отметить, что в случае отображений с ограниченным искажением предполагается лишь, что вектор-функция f непрерывна и принадлежит классу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, а предположение $\mathcal{W}^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ выполняется автоматически.

Подчеркнем, что требование (8.1.2) не предполагает постоянства знака якобиана det $(f'(x))$. Таким образом, почти квазиконформные отображения могут менять ориентацию.

Чтобы лучше оценить объем рассматриваемого класса отображений, имеет смысл отметить здесь следующее простое утверждение [12, раздел 8.1].

Предложение 8.1.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение, причем*

$$f \in \mathrm{ACL}(D) \quad \text{и} \quad \operatorname{ess\,sup}_{x\in D}\|f'(x)\| \le q < \infty\,.$$

Тогда f почти квазиконформно с постоянной $K = \epsilon\, n^{n/2}$ и $\delta = (1+\epsilon)\, q^n$, где $\epsilon = \mathrm{const} > 0$ – произвольно.

В случае, когда $a \in \partial D$ – кратная точка границы, выполнение соотношения (8.1.1) может зависеть от направления подхода к точке a с той или иной стороны D и, тем самым, определение полного дифференциала нуждается в уточнении.

Определим концы области D, исходя из аналогии с теорией простых концов Каратеодори (см., например, [13, §3]).

Для произвольного множества $U \subset D$ полагаем $[U] = \overline{U} \setminus \partial D$, где $\overline{U}$ есть замыкание в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\{U_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ – семейство подобластей $U_k \subset D$ со свойствами:

(i) для всех $k = 1, 2, \ldots \quad [U_{k+1}] \subset U_k$,

(ii) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} [U_k] = \emptyset$.

Произвольную последовательность $\{U_k\}$ с указанными свойствами будем называть *цепью* в области D.

Пусть $\{U'_k\}$, $\{U''_k\}$ – две цепи подобластей в D. Говорят, что цепь U'_k *содержится* в цепи $\{U''_k\}$, если для каждого $m \geq 1$ найдется номер $k(m)$ такой, что при всех $k > k(m)$ выполнено $U'_k \subset U''_m$. Две цепи, каждая из которых содержится в другой, называются *эквивалентными*. Классы эквивалентности ξ цепей называются *концами* области D.

Чтобы определить конец ξ достаточно задать хотя бы один представитель в классе эквивалентности. Если конец ξ определяется цепью $\{U_k\}$, то мы пишем $\xi \asymp \{U_k\}$.

Телом конца $\xi \asymp \{U_k\}$ называется множество

$$|\xi| = \cap_{i=1}^{\infty} \overline{U_k}\,.$$

Ясно, что это множество не зависит от выбора цепи подобластей $\{U_k\}$.

Пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность точек $x_m \in D$, не имеющая точек накопления в D. Такие последовательности далее называем *расходящимися* в D.

Пусть $a_\xi \in |\xi|$ – произвольная точка. Расходящаяся в D последовательность точек $x_k \in D$ *сходится к точке* a_ξ *в топологии* ξ, если $x_k \to a_\xi$ (в топологии $\mathbb{R}^n$) и для некоторой (а, следовательно, произвольной) цепи $\{U_k\} \in \xi$ выполнено условие: для каждого $k = 1, 2, \ldots$ найдется целое $m(k)$ такое, что $x_m \in U_k$ при любом $m > m(k)$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, ξ – конец D, $a_\xi \in |\xi|$ – точка. Будем говорить, что подобласть D' области D *примыкает* к точке a_ξ, если $a_\xi \in \partial D'$ и всякая последовательность точек $x_k \in D'$, сходящаяся к a_ξ в топологии $\mathbb{R}^n$ сходится к этой точке в топологии ξ. Будем говорить, что для вектор-функции $f : D \to \mathbb{R}^m$ имеет место соотношение

$$\lim_{x \to a_\xi} f(x) = A\,, \quad A = (A_1, \ldots, A_m)$$

если $f(x_k) \to A$ при $x_k \to a_\xi$ вдоль любой последовательности точек $x_k \in D$, сходящейся к a_ξ в топологии ξ. Величину A будем обозначать в этом случае символом $f(a_\xi)$.

Предположим, что вектор-функция $f : D \to \mathbb{R}^m$ и точка a_ξ таковы, что $f(a_\xi)$ существует. Будем говорить, что f имеет *полный дифференциал в граничной точке* a_ξ, если найдется постоянная матрица $C = \{C_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, для которой

$$f(x) - f(a_\xi) = C \cdot (x - a_\xi) + o(|x - a_\xi|) \quad (x \to a_\xi, \quad x \in D). \qquad (8.1.3)$$

Как и в случае внутренней точки, будем называть величину

$$df(a_\xi) = C \cdot (x - a_\xi)$$

дифференциалом f в точке a_ξ.

Дифференциал вектор-функции в граничной точке может быть не единственным (соответствующие примеры имеются в [9]).

8.2 Модуль семейства кривых

Напомним определение класса $\mathrm{ACL}^{\mathrm{p}}_\sigma$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Зафиксируем i, $1 \le i \le n$, и обозначим через D_i^* ортогональную проекцию D на гиперплоскость $x_i = 0$. Для произвольной локально суммируемой в D функции f полагаем

$$f_i^*(x_i', t, x_i'') \equiv f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,,$$

$$x_i' = (x_1, \ldots, x_{i-1}), \quad x_i'' = (x_{i+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Далее, пусть

$$D_i(x_i', x_i'') \equiv \{(x_i', t, x_i'') \in \mathbb{R}^n : (x_i', 0, x_i'') \in D_i^*\}\,.$$

Непрерывная функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях* (или кратко, ACL), если для любого $i = 1, \ldots, n$ сужения $f_i^*(x_i', t, x_i'')$ суть абсолютно непрерывны (по переменной t) внутри совокупности линейных интервалов $D \cap D_i(x_i', x_i'')$ для $\mathcal{H}^{n-1}$-почти всех точек $(x_i', 0, x_i'') \in D_i^*$. (Здесь и ниже символ $d\mathcal{H}^p$ означает элемент p-мерной меры Хаусдорфа.)

Всякая ACL-функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет производные $\partial f/\partial x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) почти всюду в D. Символом $f' \equiv (\partial f_i/\partial x_j)$ мы обозначаем формальную производную вектор-функции f в точках, где все частные производные существуют. В точках, где матрица f' не определена, условимся считать, что все $\partial f_i/\partial x_j = +\infty$ ($i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$).

Пусть $\sigma : D \to \mathbb{R}^1$ – определенная почти всюду в D, измеримая в смысле Лебега неотрицательная функция и $p \ge 1$ – постоянная. Функциональный класс $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$ определяется как множество функций класса

ACL в D, для которых

$$\int\limits_D \|f'(x)\|^p \, \sigma(x) \, d\mathcal{H}^n < \infty \, .$$

В случае, когда весовая функция $\sigma \equiv 1$, имеем известный функциональный класс $\mathrm{ACL}^p(D)$, совпадающий с множеством непрерывных функций соболевского класса $W_p^1(D)$ [17, теоремы 5.6.2-3].

Пусть D – область в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, пусть $U \subset D$ счетно $(\mathcal{H}^k, k)$-спрямляемое множество, $1 \leq k \leq m$, и пусть $\sigma : U \to \mathbb{R}^1$ – неотрицательная $\mathcal{H}^k$ – измеримая функция. Зафиксируем постоянную $p > 1$ и для произвольного семейства Γ локально спрямляемых дуг $\gamma \subset U$ определим (p, σ)-модуль

$$\mathrm{mod}_{p,\sigma}(\Gamma; U) = \inf_{\rho} \frac{\int\limits_U \rho^p \, \sigma \, d\mathcal{H}^k}{\left(\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_{\gamma} \rho \, d\mathcal{H}^1 \right)^p} \, , \tag{8.2.4}$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным, измеримым по Борелю функциям ρ в U. Если $\Gamma = \emptyset$, то мы полагаем $\mathrm{mod}_{p,\sigma}(\Gamma; U) = \infty$.

При $U = D$ имеем стандартное определение весового (p, σ)-модуля семейства Γ в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [18, раздел 3.2]).

Пусть y и a – произвольная пара точек такая, что $y \in D$ и a либо внутренняя точка D, либо $a = a_\xi \in |\xi|$, где ξ – некоторый конец области $D \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что простая жорданова дуга γ, заданная параметризацией $x(\tau) : [0, 1) \to D$, *ведет из точки y в точку a*, если $x(0) = y$ и

$$\lim_{\tau \to 1} x(\tau) = a \quad \text{при} \quad a \in D$$

и существует последовательность $\tau_k \to 1$, вдоль которой

$$\lim_{\tau_k \to 1} x(\tau_k) = a_\xi \quad \text{при} \quad a \in |\xi| \, .$$

Рассмотрим семейство Γ всевозможных локально спрямляемых, простых жордановых дуг $\gamma \subset D$, ведущих из точки y в точку a. Положим

$$\mathrm{mod}_{p,\sigma}\Gamma(y, a; D) = \mathrm{mod}_{p,\sigma}(\Gamma; D) \, . \tag{8.2.5}$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $a = a_\xi$ – некоторая ее внутренняя или граничная точка. Зафиксируем произвольно непрерывную вектор-функцию $\nu : \overline{D} \to \mathbb{R}^k$, $1 \le k < \infty$. Положим $B^\nu(a,r) = \{x \in D : |\nu(x) - \nu(a)| < r\}$ и обозначим через $B^\nu_D(a,r)$ компоненту связности множества $B^\nu(a,r)$, содержащую точку a в случае, когда a – внутренняя точка D, и примыкающую к a в случае, когда $a \in |\xi|$.

Символом $S^\nu_D(a,r)$ будем обозначать относительную границу

$$B^\nu_D(a,r) = \partial B^\nu_D(a,r) \setminus \partial D\,.$$

При $\nu(x) \equiv x$ мы будем пользоваться обозначениями $B^n(a,r)$, $B^n_D(a,r)$ и $S^\nu_D(a,r)$, соответственно.

Предположим, что $\nu(x)$ локально липшицева. Пусть $h(x) = |\nu(x) - \nu(a)|$ и пусть

$$0 < \operatorname{ess}\inf_{x\in D'} |\nabla h(x)| \le \operatorname{ess}\sup_{x\in\Delta} |\nabla h(x)| < \infty \tag{8.2.6}$$

на всяком подмножестве $D' \Subset D$.

По теореме 3.2.15 [16] (см. также теорему 1.6.1 в [18]) для почти всех $t \in \mathbb{R}^1$ множества $S^\nu_D(a,t)$ счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемы.

Зафиксируем счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемое множество $S^{nu}_D(a,t)$ и неотрицательную измеримую функцию σ в $S^{nu}_D(a,t)$. Пусть U – компонента связности $S^{nu}_D(a,t)$. Для произвольной пары точек a_1, $a_2 \in U$ пусть $\Gamma = \Gamma(a_1,a_2)$ означает семейство всевозможных локально спрямляемых дуг $\gamma \subset U$, соединяющих точки a_1 и a_2. Определим весовой модуль

$$\operatorname{mod}(a_1,a_2;\sigma) = \operatorname{mod}_{n,\sigma}\Gamma(a_1,a_2)\,. \tag{8.2.7}$$

Далее, пусть

$$\kappa(S^\nu_D(a,t),\sigma) = \inf_U \inf_{a_1,a_2\in U} \operatorname{mod}(a_1,a_2;\sigma), \tag{8.2.8}$$

где первая из точных нижних граней берется по множеству $\{U\}$ всевозможных компонент связности U множества $S^\nu_D(a,t)$.

Положим

$$\kappa^\nu(a,t) = \kappa(S^\nu_D(a,t),\sigma^*)\,, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{|\nabla h|},$$

где σ – некоторая, наперед заданная неотрицательная измеримая в D функция.

Укажем следующую многомерную версию известного принципа "длины и площади"(см., например, [19], [13]).

Лемма 8.2.1. [7] *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, точка $a = a_\xi \in \overline{D}$, вектор-функция $\nu : D \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условию (8.2.6) и $\sigma(x)$ – измеримая, неотрицательная в D функция. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^m$ – вектор-функция класса $\mathrm{ACL}^n_\sigma(D)$. Тогда при любых t', $t'' \in h(D)$, $t' < t''$, выполнено*

$$\int\limits_{t'}^{t''} \Omega^n\left(f, S^\nu_D(a,t)\right) \kappa^\nu(a,t)\, dt \leq \int\limits_{D(t',t'')} \|f'(x)\|^n\, \sigma(x)\, d\mathcal{H}^n(x)\,. \qquad (8.2.9)$$

Здесь

$$D(t',t'') = \{x \in D : t' < |\nu(x) - \nu(a)| < t''\},$$

$$\Omega\left(f, S^\nu_D(a,t)\right) = \sup_U \operatorname{osc}(f, U)$$

и точная верхняя грань берется по всем компонентам связности U множества $S^\nu_D(a,t)$.

8.3 Основная теорема. Комментарии

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Будем говорить, что функция $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, *монотонна*, если для всякой подобласти $U \subset D$ выполнено

$$\operatorname{osc}\left(f, U\right) \leq \operatorname{osc}\left(f, \partial' U\right), \quad \partial' U = \partial U \setminus D\,.$$

Здесь и ниже символом

$$\operatorname{osc}\left(\phi, E\right) = \sup_{x,y \in E} |\phi(x) - \phi(y)|$$

обозначается колебание функции ϕ на множестве E.

Пусть $h(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – полунепрерывная сверху функция. Будем говорить, что функция $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, является h-*монотонной*, если для всякой подобласти $U \subset D$ выполнено

$$h\left(\operatorname{osc}\left(f, U\right)\right) \leq \operatorname{osc}\left(f, \partial' U\right),$$

и *α-монотонной*, $0 < \alpha \equiv \mathrm{const} < \infty$, если f является h-монотонной с $h(t) = t^{\alpha}$.

Некоторые примеры α-монотонных функций приведены в [8].

Зафиксируем непрерывную вектор-функцию $\nu : \overline{D} \to \mathbb{R}^k$. Будем говорить, что вектор-функция $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, является *слабо* (h, ν)-*монотонной вблизи точки* $a = a_\xi$ (внутренней или граничной), если

$$\limsup_{r\to 0} \frac{h\left(\mathrm{osc}\left(f, B^{\nu}_{D}(a, r)\right)\right)}{\mathrm{osc}\left(f, S^{\nu}_{D}(a, r)\right)} < \infty\,, \tag{8.3.10}$$

и *слабо* (α, ν)-*монотонной вблизи точки* a, если f слабо (h, ν)-монотонна вблизи точки a при $h(t) = t^{\alpha}$.

Ясно, что всякая монотонная в смысле Лебега функция слабо (α, ν)-монотонна, $\alpha = 1$, вблизи каждой точки.

Для произвольного непрерывного отображения $y = \varphi(x) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и множества $A \subset D$ символом $N(y; \varphi, A)$ будем обозначать число прообразов точки $y \in \mathbb{R}^n$ в A. Далее полагаем

$$n(x; \varphi, A) = N(y; \varphi, A)\,, \quad \text{где} \quad y = \varphi(x)\,.$$

Сформулируем основной результат работы

Теорема 8.3.1. *Предположим, что вектор-функция $f : D \to \mathbb{R}^n$ осуществляет почти квазиконформное отображение области $D \subset \mathbb{R}^n$ в смысле* (8.1.2)*, для которого*

$$\int\limits_{D} \frac{\delta(x)\,dx}{K(x)} < \infty\,. \tag{8.3.11}$$

Тогда для любой подобласти $A \subset D$ выполнено

$$\int\limits_{A} \frac{\|f'(x)\|^n\,dx}{K(x)\,n(x; f, A)} \leq \mathrm{mes}_n(f(A)) + \int\limits_{A} \frac{\delta(x)\,dx}{K(x)\,n(x; f, A)}\,. \tag{8.3.12}$$

С другой стороны, пусть $a = a_\xi \in \overline{D}$ – внутренняя или граничная точка области и $\nu : \overline{D} \to \mathbb{R}^k$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая (8.2.6)*. Если* *i) для некоторого* $p > n$ *и некоторой постоянной матрицы* $C = (C_{ij})_{i,j=1}^n$ *выполняется*

$$\limsup_{\substack{y\to a\\ y\in D}} \int\limits_{B_D^\nu(a,r(a,y))} \frac{\|f'(x)-C\|^p\,dx}{K(x)\,n(x;f,B_D^\nu(a,r(a,y)))} \Bigg/ r^p \operatorname{mod}_{p,\sigma_r}\Gamma(y,a;B_D^\nu(a,r(a,y))) = 0\,, \tag{8.3.13}$$

где

$$r(a,y) = \inf\{t>0 : y\in B_D^\nu(a,t)\}, \quad \sigma_r(x) = \frac{1}{K(x)\,n(x;f,B_D^\nu(a,r))}\,, \tag{8.3.14}$$

либо

ii) вектор-функция $f(x) - C\cdot x$ *является слабо* (α,ν)*-монотонной вблизи* a *и существует постоянная* $\lambda > 1$*, для которой*

$$\limsup_{\substack{y\to a\\ y\in D}} \int\limits_{B_D^\nu(a,\lambda r(a,y))} \frac{\|f'(x)-C\|^n\,dx}{K(x)\,n(x;f,B_D^\nu(a,r(a,y)))} \Bigg/ r^{n\alpha}(a,y) \int\limits_{r(a,y)}^{\lambda r(a,y)} \kappa^\nu(a,t)\frac{dt}{t} = 0, \tag{8.3.15}$$

то f *имеет в точке* $a = a_\xi$ *полный дифференциал, равный* $C\cdot dx$.

Остановимся на некоторых частных случаях приведенной теоремы. Пусть $w = f(z) : D\subset\mathbb{C}^1\to\mathbb{C}^1$ – обобщенное решение уравнения Бельтрами

$$f_{\overline{z}} = \mu(z)\,f_z\,, \tag{8.3.16}$$

где $\mu(z)$ – наперед заданная, измеримая комплекснозначная функция, и символами

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i\,f_y)\,, \quad f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i\,f_y)$$

обозначены формальные производные.

Подчеркнем, что в отличие от традиционного случая (см., например, [10, глава V], [11, Chapter 1]) здесь не предполагается, что $|\mu(z)| < 1$.

Мы имеем
$$J(z,f) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = (1-|\mu(z)|^2)|f_z|^2$$
и
$$\|f'\|^2 = |f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2 = (1+|\mu(z)|^2)|f_z|^2\,.$$
Таким образом,
$$\|f'\|^2 \leq \frac{1+|\mu|^2}{|1-|\mu|^2|}\,|J(z,f)|$$
и соотношение (8.1.2) выполняется с
$$K(z) = \frac{1+|\mu(z)|^2}{|1-|\mu(z)|^2|}\,, \quad \delta(z)\equiv 0\,.$$
Предположение (8.3.11) всегда выполнено.
Здесь мы также имеем
$$\sigma_r(z) = \frac{1}{K(x)\,n(x;f,B^{\nu}_D(a,r))} = \frac{|1-|\mu(z)|^2|}{(1+|\mu(z)|^2)\,n(x;f,B^{\nu}_D(a,r))}.$$
Для однолистных отображений $n(x;f,B^{\nu}_D(a,r))\equiv 1$ и
$$\sigma_r(z) = \frac{|1-|\mu(z)|^2|}{1+|\mu(z)|^2}\,.$$

Теорема 8.3.1 связывает дифференцируемость отображения f в особой точке $a=a_\xi$ с поведением характеристики $\mu(z)$ в ее окрестности. В случае, когда a есть внутренняя точка области, см. [1], [2], [3, глава VI], [4, глава 11] [26]. В случае, когда $a=a_\xi$ есть граничная точка области и $\mu(z)\equiv 0$, близкие результаты см. в [5, Chapter 11].

Для отображений с ограниченным искажением в пространстве близкие вопросы рассматривались в [24, глава VI], [25], [27], [29] и [30].

8.4 Доказательство теоремы

Пусть $\varphi : D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение. Говорят, что φ является *абсолютно непрерывным*, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого измеримого множества $E\subset D$, $\mathrm{mes}_n E<\delta$, выполнено $\mathrm{mes}_n\varphi(E)<\varepsilon$. В частности, всякое абсолютно непрерывное отображение обладает N-свойством Лузина.

Лемма 8.4.1. [20] *Если отображение φ непрерывно и принадлежит классу $\mathcal{W}^{1,n}_{\rm loc}(D)$, то φ абсолютно непрерывно на всякой подобласти $D' \Subset D$.*

Пользуясь леммой 8.4.1, заключаем о справедливости следующего утверждения о замене переменных (см., например, [22])

Лемма 8.4.2. *Если отображение φ непрерывно и принадлежит классу $\mathcal{W}^{1,n}_{\rm loc}(D)$, то для всякой интегрируемой в $\varphi(D)$ функции $u(y)$ функция $(u \circ \varphi)(x)|J(x,\varphi)|$ интегрируема в D, причем*

$$\int\limits_{\varphi(D)} u(y)\, N(y;\varphi,A)\, dy = \int\limits_{A} (u\circ\varphi)(x)\, |J(x,\varphi)|\, dx\,. \qquad (8.4.17)$$

В частности, замечая, что

$$J(x,\varphi)\, J(y,\varphi^{-1}) = 1\,, \quad y=\varphi(x)\,,$$

и полагая

$$u(y) = \frac{1}{N(y;\varphi,A)}\,,$$

на основании (8.4.17) имеем

$$\mathrm{mes}_n(\varphi(A)) = \int\limits_{\varphi(A)} dy = \int\limits_{A} \frac{|J(x,\varphi)|}{n(x;\varphi,A)}\, dx\,.$$

Отсюда, на основании (8.1.2) заключаем, что

$$\int\limits_{A} \frac{\|f'(x)\|^n - \delta(x)}{K(x)\, n(x;f,A)}\, dx \le \mathrm{mes}_n(f(A))\,,$$

и, тем самым, приходим к (8.3.12).

Рассмотрим семейство локально спрямляемых дуг $\Gamma(y,a;B^{\nu}_D(a,|y-a|))$, лежащих в $B^{\nu}_D(a,|y-a|)$ и соединяющих точку $y\in B^{\nu}_D(a,|y-a|)$ с точкой a. Выберем в (8.2.4) функцию $\rho(x)=\|f'(x)-C\|$. Находим

$$\operatorname{mod}_{p,\sigma}\Gamma(y,a;B_D^{\nu}(a,|y-a|))\le\frac{\int\limits_{B_D^{\nu}(a,|y-a|)}\|f'(x)-C\|^p\sigma(x)\,d\mathcal{H}^n}{\inf\limits_{\gamma\in\Gamma(y,a;B_D^{\nu}(a,|y-a|))}\left(\int\limits_{\gamma}\|f'(x)-C\|\,|dx|\right)^p}\,. \tag{8.4.18}$$

Если γ – дуга семейства $\Gamma(y,a;B_D^{\nu}(a,|y-a|))$, то

$$|f(y)-f(a)-C\cdot(y-a)|\le\int\limits_{\gamma}\|f'(x)-C\|\,d\mathcal{H}^1\,.$$

Тем самым, в силу (8.4.18) для произвольной точки $y\in D$ имеем

$$|f(y)-f(a)-C\cdot(y-a)|^p\le\frac{\int\limits_{B_D^{\nu}(a,|y-a|)}\|f'(x)-C\|^p\sigma(x)\,d\mathcal{H}^n}{\operatorname{mod}_{p,\sigma}\Gamma(y,a;B_D^{\nu}(a,|y-a|))}. \tag{8.4.19}$$

В силу неравенства (8.4.19) предположение (8.3.13) влечет выполнение (8.1.1) (соответственно, (8.1.3)) и, тем самым, существование в случае i) полного дифференциала в точке $a=a_\xi$.

Докажем утверждение в условиях ii). Фиксируем произвольно точку $y\in D$ и рассмотрим подобласть

$$B_D^{\nu}(a,r)\,,\quad a=a_\xi\,,\quad r=r(a,y)\,,$$

примыкающую к концу ξ и содержащую точку y в замыкании. Положим $f^*(x)=f(x)-f(a)-C\cdot(x-a)$. Пользуясь леммой 8.2.1, на основании соотношения (8.2.9) имеем

$$\int\limits_{r(a,y)}^{\lambda r(a,y)}\Omega^n\left(f^*,S_D^{\nu}(a,t)\right)\kappa^{\nu}(a,t)\,dt\le\int\limits_{D(r(a,y),\lambda r(a,y))}\|(f^*)'(x)\|^n\,\sigma_{\lambda r(a,y)}(x)\,d\mathcal{H}^n(x)\,,$$

где $\sigma_{\lambda r(a,y)}(x)$ определена в (8.3.14).

Отображение $f^*(x)$ слабо (α,ν)-монотонно вблизи точки a и в силу (8.3.10) для всякого t, $r(a,y) < t < \lambda\, r(a,y)$, и некоторой постоянной $A < \infty$ выполнено

$$|f^*(y) - f^*(a)|^\alpha \le \operatorname{osc}^\alpha(f^*, B^\nu_D(a,t)) \le A\,\Omega\,(f^*, S^\nu_D(a,t))\,.$$

Отсюда получаем

$$|f^*(y) - f^*(a)|^{\alpha n} \int\limits_{r(a,y)}^{\lambda r(a,y)} \kappa^\nu(a,t)\,dt \le$$

$$\le A^n \int\limits_{D(r(a,y),\lambda r(a,y))} \|f'(x) - C\|^n\,\sigma_{\lambda r(a,y)}(x)\,d\mathcal{H}^n(x)\,.$$

Предположение (8.3.15) влечет выполнение (8.1.1) (и, соответственно, (8.1.3)). Теорема доказана. $\square$

В.М. Миклюков
Лаборатория "Сверхмедленные процессы"
Волгоградского государственного университета
Университетский пр-т 100, Волгоград 400062
E-mail: miklyuk@mail.ru

Список литературы

[1] O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung, Deutsche Math., v. 3, 1938, 621-678.

[2] П.П. Белинский, Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке, Уч. зап. Львовского ун-та, т. 29, сер. мех.-матем., вып. 6, 1954, 58-70.

[3] Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М.: ГИФМЛ, 1960.

[4] Ю.Ю. Трохимчук, Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности, Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2007.

[5] Ch. Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York etc., 1992.

[6] E.D. Callender, Hölder-continuity of N-dimensional quasiconformal mappings, Pacific J. Math., v. 1, 1960, 49-515.

[7] В.М. Миклюков, Об одной модификации принципа длины и площади на абстрактных поверхностях, Uzbek Mathematical Journal, 2009, N 1, 68-79.

[8] В.М. Миклюков, О некоторых признаках существования полного дифференциала, Сиб. матем. ж., 2009, (в печ.)

[9] В.М. Миклюков, Некоторые признаки существования полного дифференциала в точке, напр. в Мат. сб. (март 2009)

[10] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М.: Мир, 1969.

[11] S.L. Krushkal', Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces, V.H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1979.

[12] В.М. Миклюков, Геометрический анализ: Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007.

[13] Г.Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск: изд-во СО АН СССР, 1965.

[14] С. Сакс, Теория интеграла, М.: ИЛ, 1949.

[15] L.C. Evans and R.F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions. Studies in advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton – New York – London – Tokyo, 1992; имеется русский перевод: Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи, Теория меры и тонкие свойства функций, Новосибирск: Научная книга, 2002.

[16] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1969; имеется русский перевод: Г. Федерер, Геометрическая теория меры, Изд-во 'Наука', Москва, 1987.

[17] A. Kufner, O. John, and S. Fučik, Function Spaces, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[18] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, 2-е издание, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.

[19] J. Lelong-Ferrand, Représentation conforme et transformations a intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier—Villars, Paris, 1955.

[20] O. Martio and J. Malý, Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$, J. Reine Angew. Math., b. 485, 1995, 19-36.

[21] Г.Д. Суворов, Обобщенный "принцип длины и площади" в теории отображений, Киев: Изд-во 'Наукова Думка', 1985.

[22] С.К. Водопьянов, Дифференцируемочть отображений групп Карно соболевских классов, Матем. сб., т. 194, n. 6, 2003, 67-86.

[23] Ю.Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосибирск: Наука, 1982.

[24] Ю.Г. Решетняк, Теоремы устойчивости в геометрии и анализе, Новосибирск: Наука, 1982.

[25] В.А. Зорич, Принцип статики и устойчивость изометрий, в сб. "Комплексный анализ в современной математике", К 80-летию со дня рождения Бориса Владимировича Шабата, Редактор - составитель Е.М. Чирка, М.: Фазис, 2001, 3–17.

[26] Г.С. Шефель, Устойчивость плоских квазиконформных отображений порядка p, Сиб. мат. журн., т. 28, n. 4, 1987, 214-223.

[27] Г.С. Шефель, О близости пространственного квазиконформного отображения порядка p к конформному, Сиб. мат. журн., т. 38, n. 1, 1997, 217-234.

[28] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford: Clarendon Press. 1993.

[29] V.Ya. Gutlyanskii, O. Martio, and M. Vuorinen, On conformal differentiation in space, Preprint 278, University of Helsinki, Depart. of Math., 2001, 19 pp.

[30] V.Ya. Gutlyanskii, and T. Sugawa, On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings, Preprint 283, University of Helsinki, Depart. of Math., 2001, 18 pp.